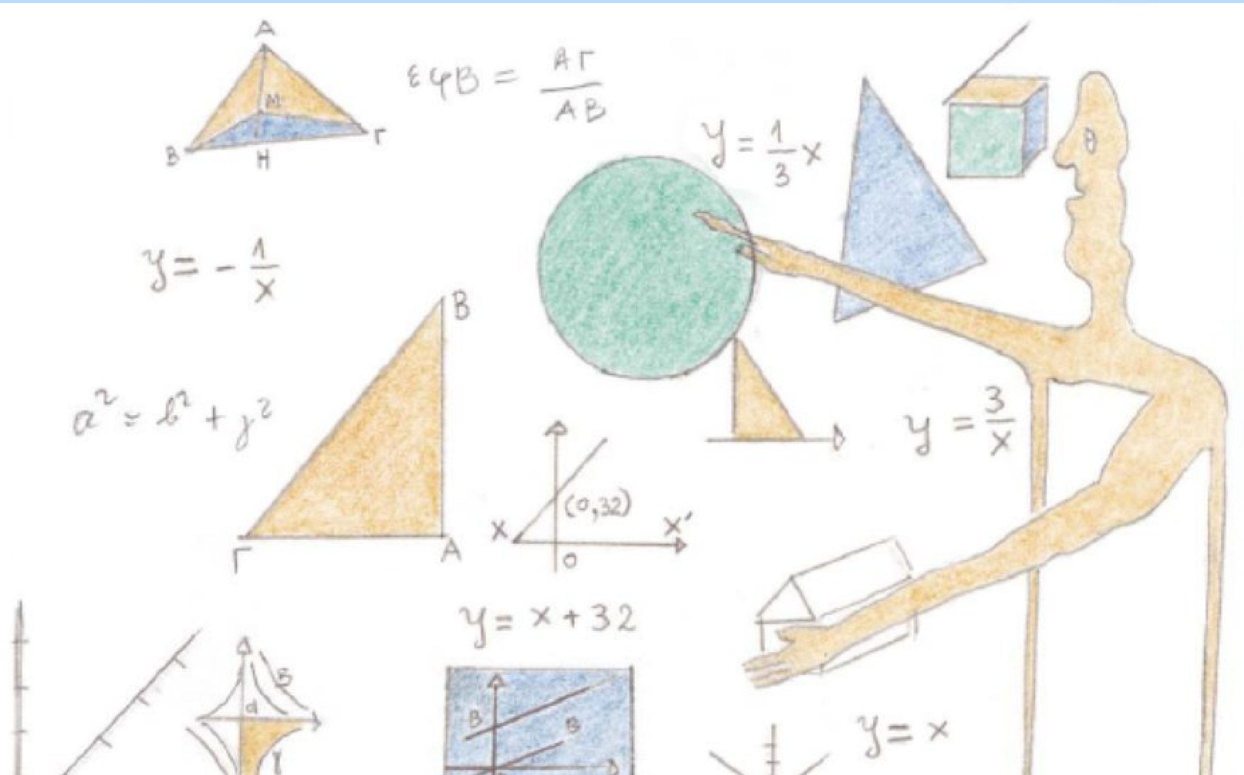
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Β΄ Γυμνασίου

ΜΕΡΟΣ Β΄ – Τόμος 2ος

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 3.1 – 4.7

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Παναγιώτης Βλάμος, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Παναγιώτης Δρούτσας, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Γεώργιος Πρέσβης, ***Μαθημ/κός***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Κων/νος Ρεκούμης, ***Μαθημ/κός,***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Βασίλειος Γιαλαμάς, ***Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.***
Χαράλαμπος Τουμάσης, ***Σχολ. Σύμβουλος Μαθημ/κών***
Πολυξένη Ρόδου, ***Μαθημ/κός, Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Θεοδόσης Βρανάς, ***Σκιτσογράφος*** **-** ***Εικονογράφος***

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευγενία Βελάγκου, ***Φιλόλογος***
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπ/σης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Γεώργιος Πολύζος, ***Πάρεδρος ε.θ.***
του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Γεώργιος Μήλιος, ***Ζωγράφος-Χαράκτης***

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Τόμος 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 3.1 – 4.7

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»
Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.
Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ</u>
<u>ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μέτρηση Κύκλου

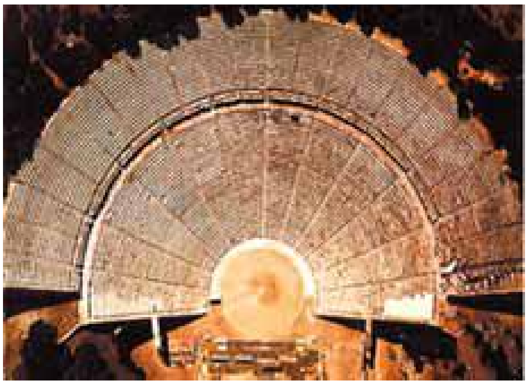
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.

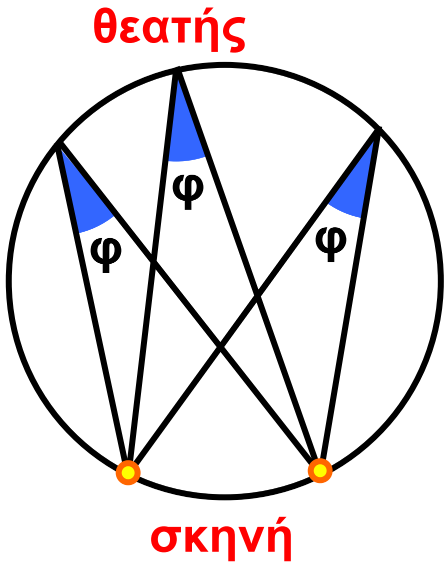
Ο αριθμός π προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

Θα εξετάσουμε, επιπλέον, τα κανονικά πολύγωνα: πολύγωνα με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι πολύ γνωστά σχήματα σ’ εμάς, αλλά τώρα θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα στοιχεία τους και την κατασκευή τους.

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

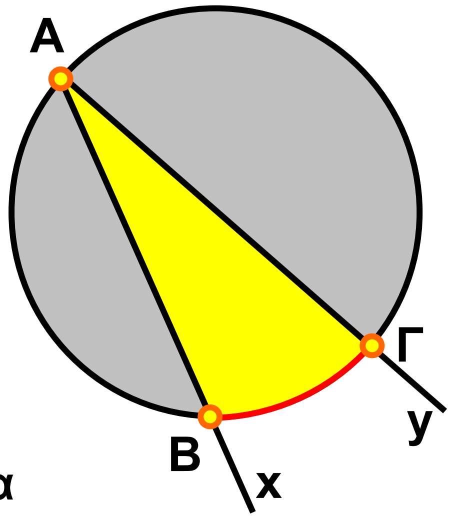


Έχετε αναρωτηθεί ποτέ γιατί τα θέατρα, όπως η Επίδαυρος, έχουν «κυκλικό» σχήμα;



Γιατί από κάθε κάθισμα, που βρίσκεται πάνω στον κύκλο, ο θεατής «βλέπει τη σκηνή με την ίδια γωνία φ». Οι γωνίες που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα έχουν την κορυφή τους (θεατής) πάνω στον κύκλο και οι δύο πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.

Μια γωνία **$x\hat{A}y$** που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).

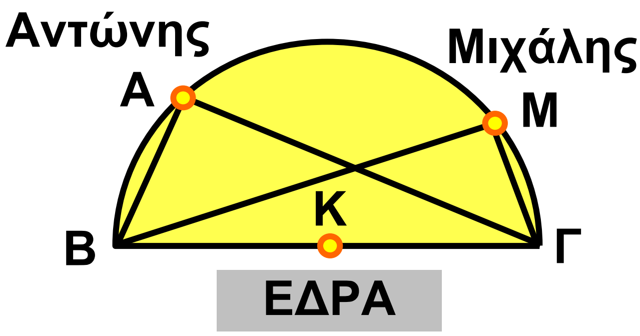


Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $Β\hat{Α}Γ$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο Πανεπιστήμιο γίνεται μάθημα στο Αμφιθέατρο. Δύο φοιτητές, ο Αντώνης και ο Μιχάλης, κάθονται σε μία σειρά θέσεων που σχηματίζει με την έδρα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Στο διάλειμμα ο Αντώνης μέτρησε την απόστασή του από τα δύο άκρα Β, Γ της έδρας και βρήκε ότι ΑΒ = 3 m, ΑΓ = 4 m, ενώ έχουμε ότι ΒΓ = 5m. Ο Μιχάλης, αντίστοιχα, βρήκε ότι ΒΜ = 4,47m και ΜΓ = 2,24 m.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.
β) Τι γωνίες είναι οι Α και Μ;
γ) Τι γωνίες νομίζετε ότι θα είναι η Α και Μ , αν οι μαθητές καθίσουν σε άλλες θέσεις της ίδιας σειράς θέσεων;



Λύση

α) Έχουμε ότι:

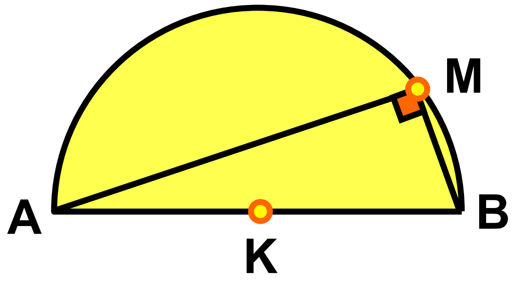
$$AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = B\Gamma^2$$

$$BM^2 + M\Gamma^2 = (4,47)^2 + (2,24)^2 = 25 = B\Gamma^2$$

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, τα τρίγωνα θα είναι ορθογώνια, οπότε θα ισχύει $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{M} = 90^o$.

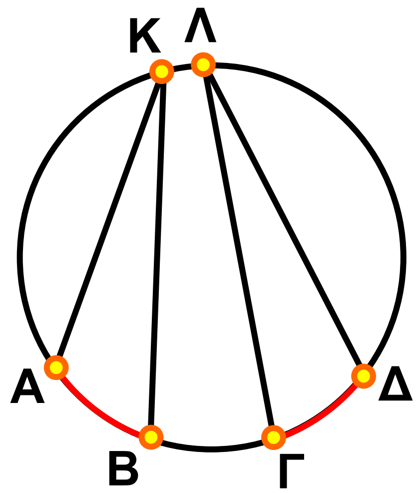
γ) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{M}$ θα είναι και πάλι ορθές, οποιαδήποτε θέση και αν πάρουν οι μαθητές στην ίδια σειρά θέσεων.



Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Επομένως, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που είναι η ευθεία γωνία. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της.

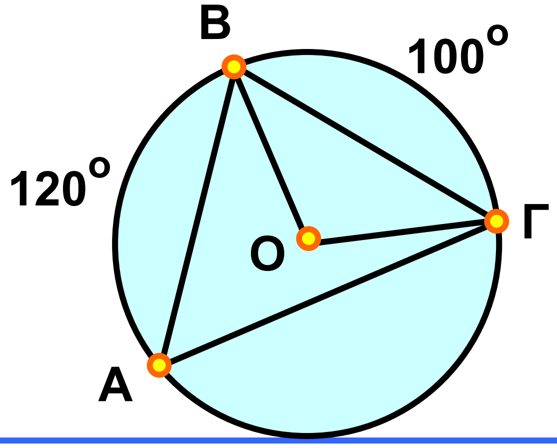


Συγκεκριμένα:

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση:

Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100^o$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι και αυτή ίση με 100^o.

Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με την επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι:

$BA\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = 50^o$. Ομοίως προκύπτει ότι: $B\hat{\Gamma}A = 60^o$.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o, θα ισχύει ότι: $A\hat{B}\Gamma = 180^o - 50^o - 60^o = 70^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

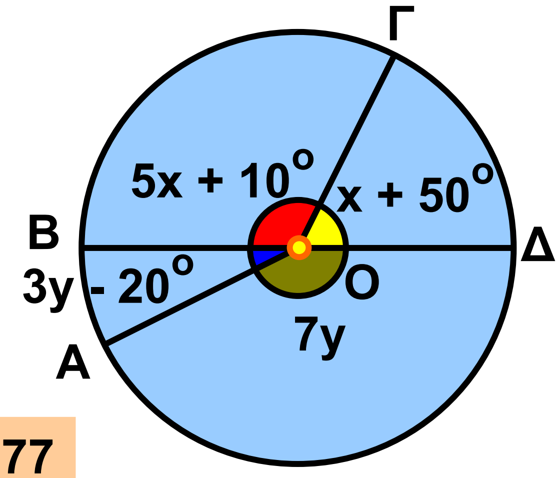
Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$.

Λύση:

Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε:

$5x + 10^o + x + 50^o = 180^o$ ή

$6x = 120^o$, επομένως $x = 20^o$.



Ομοίως τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{BA}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $3y - 20^o + 7y = 180^o$, επομένως $10y = 200^o$ ή $y = 20^o$.

Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{AB} = 3y - 20^o = 60^o - 20^o = 40^o$,

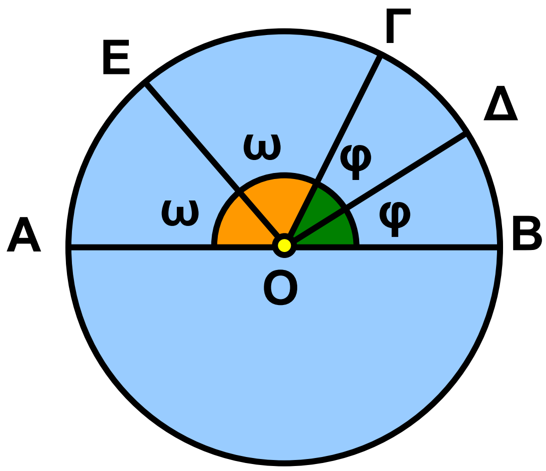
$\overset{\frown}{B\Gamma} = 5 \cdot 20^o + 10^o = 110^o$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 20^o + 50^o = 70^o$,

$\overset{\frown}{\Delta A} = 7 \cdot 20^o = 140^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$, $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$.

Λύση:



Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $B\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ και $A\hat{O}E = E\hat{O}\Gamma = \omega$.

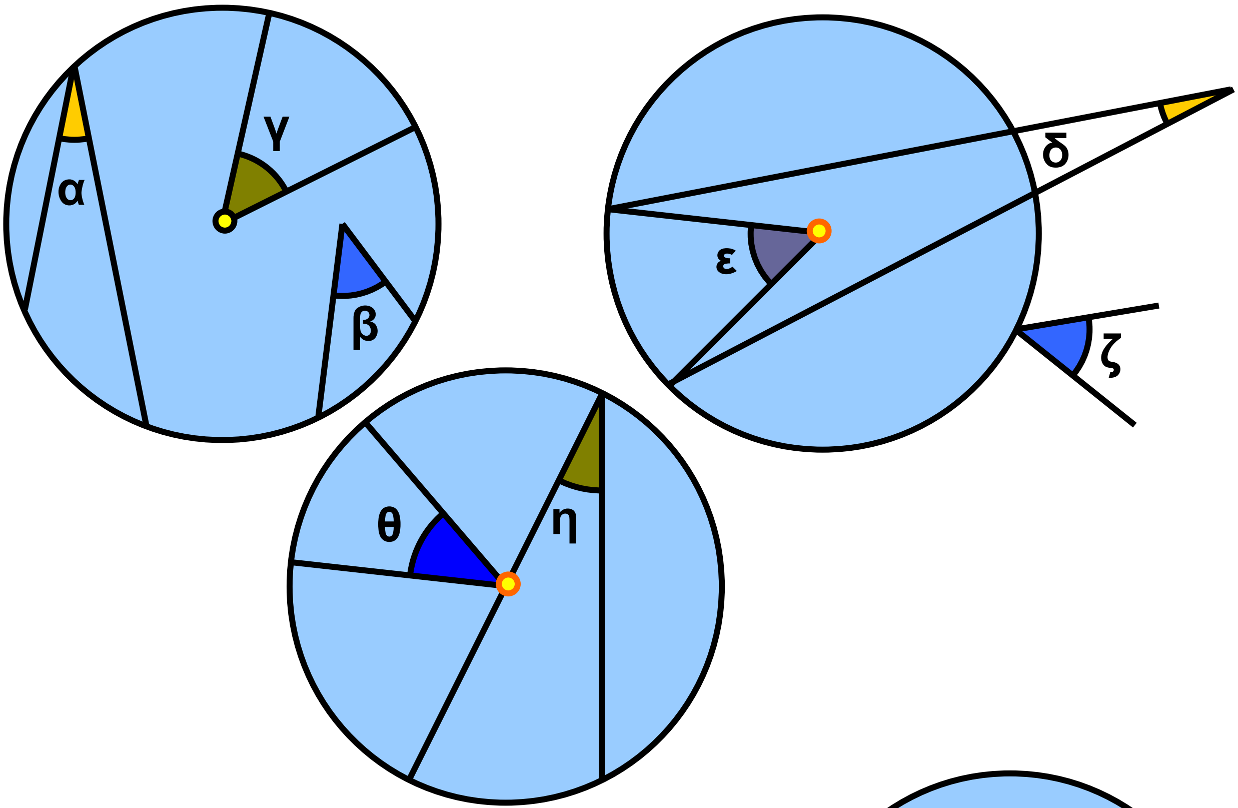
Όμως, $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}\Gamma + E\hat{O}\Gamma = \varphi + \omega$.

Έχουμε $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}A = 180^o$, δηλαδή $2\varphi + 2\omega = 180^o$, οπότε $\varphi + \omega = 90^o$.

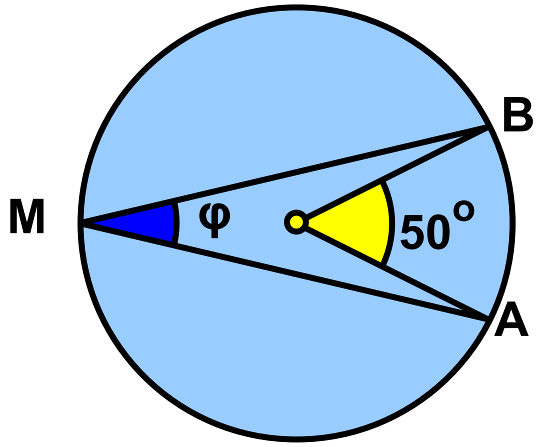
Άρα $\Delta\hat{O}E = 90^o$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$ είναι ίσο με 90^o.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στα παρακάτω τρία σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;

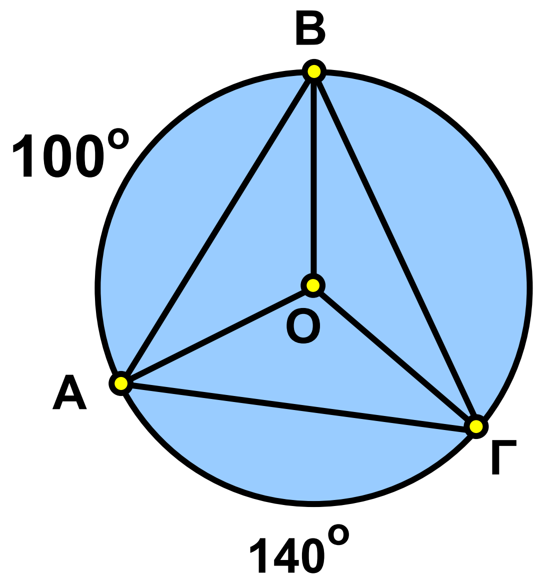


2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		A	B	Γ
α)	το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50^o	25^o	100^o
β)	το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι:	50^o	25^o	100^o

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		A	B	Γ
α)	το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
β)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$ είναι:	120°	140°	100°
γ)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
δ)	το μέτρο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ είναι:	60°	70°	50°

4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι:

Α: 80°   Β: 180°   Γ: 90°   Δ: 45°.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στους παρακάτω πίνακες να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
180°	60°	90°

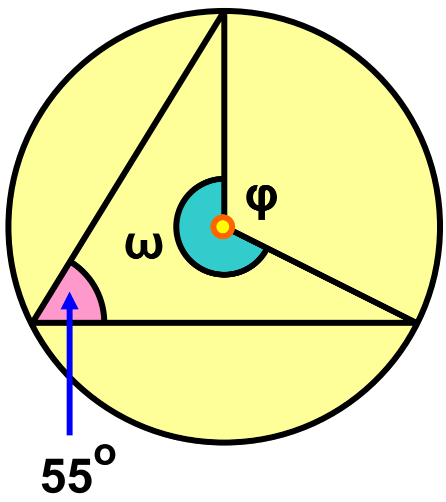
β) Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:		
Α	**Β**	**Γ**
είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμ-μένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγε-γραμμένης

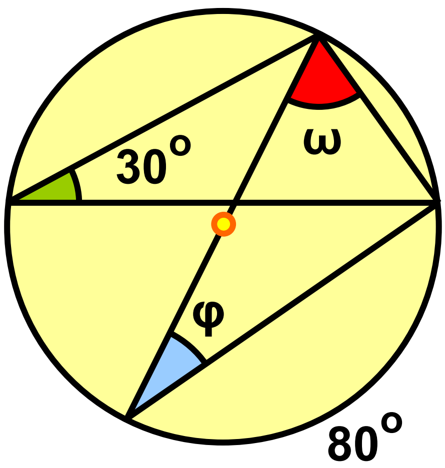
γ) Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:		
Α	**Β**	**Γ**
60°	90°	30°

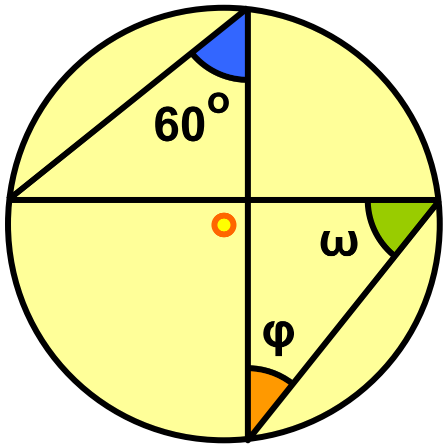
δ) Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:		
Α	**Β**	**Γ**
45°	90°	270°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

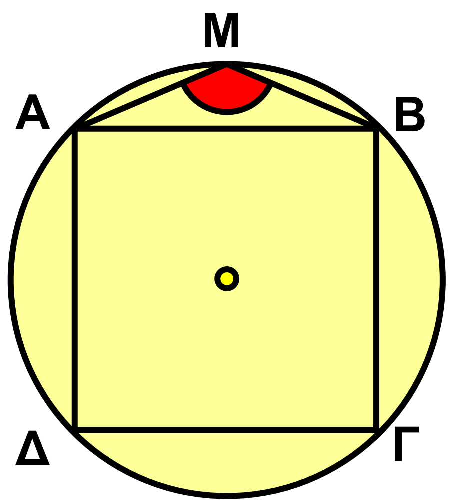
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



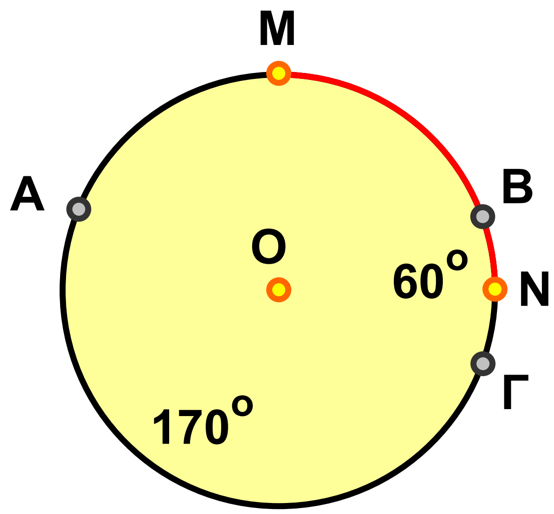




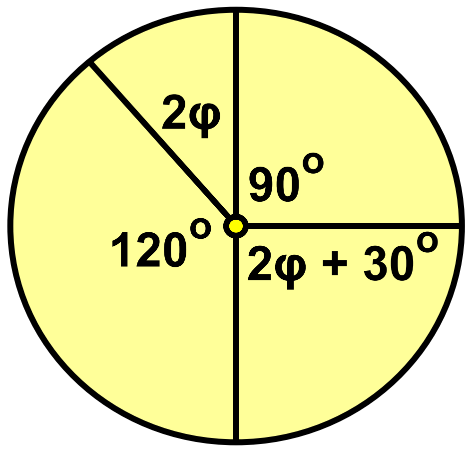
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{AMB}$.



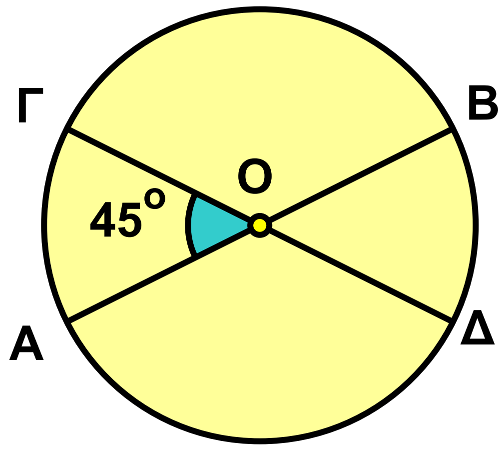
3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{ΒΓ} = 60^\circ$ και $\overset{\frown}{ΑΓ} = 170^\circ$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΜΝ}$.



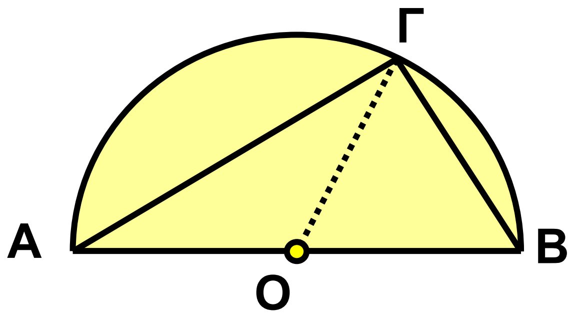
4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο διπλανό σχήμα.



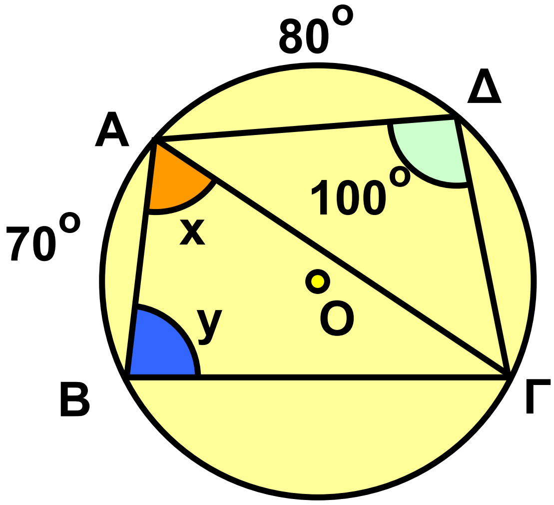
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΔΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΑ}$, αν γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Ο}Γ = 45^\circ$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 2\overset{\frown}{ΒΓ}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

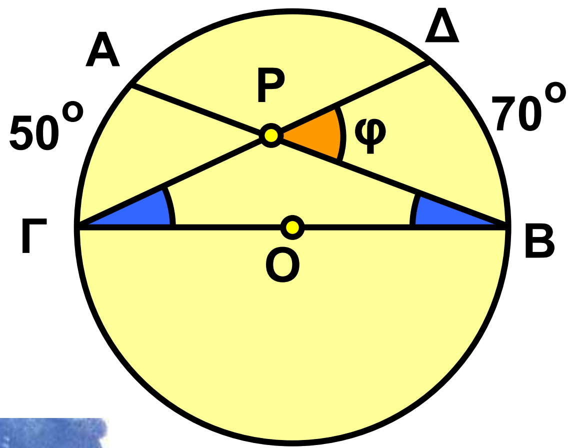


7 Να υπολογίστε τις γωνίες x, y στο διπλανό σχήμα.



8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 100^o$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 160^o$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 80^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

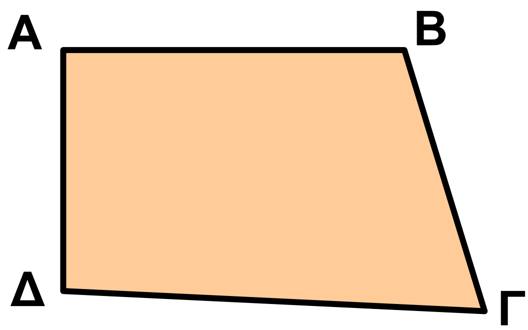
9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $ΑΓ = 50^o$ και $ΒΔ = 70^o$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



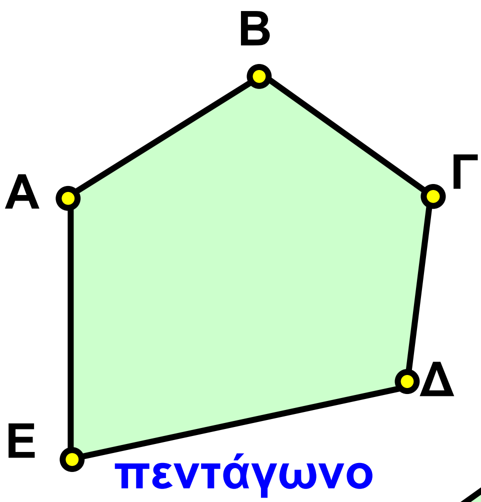
3.2. Κανονικά πολύγωνα

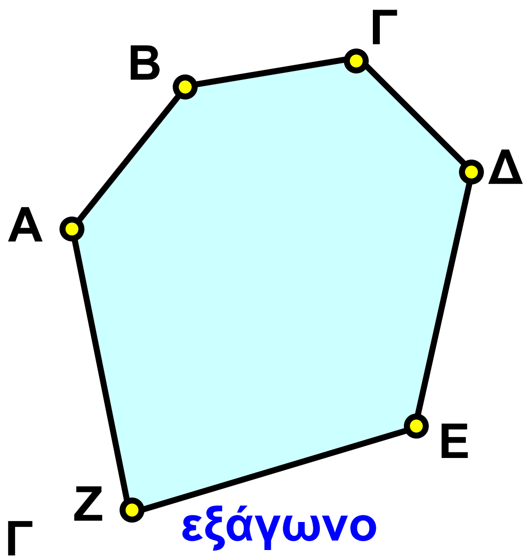
Στην Α΄ Γυμνασίου μελετήσαμε διάφορα είδη τετραπλεύρων, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, το ρόμβο, το τετράγωνο και το τραπέζιο.

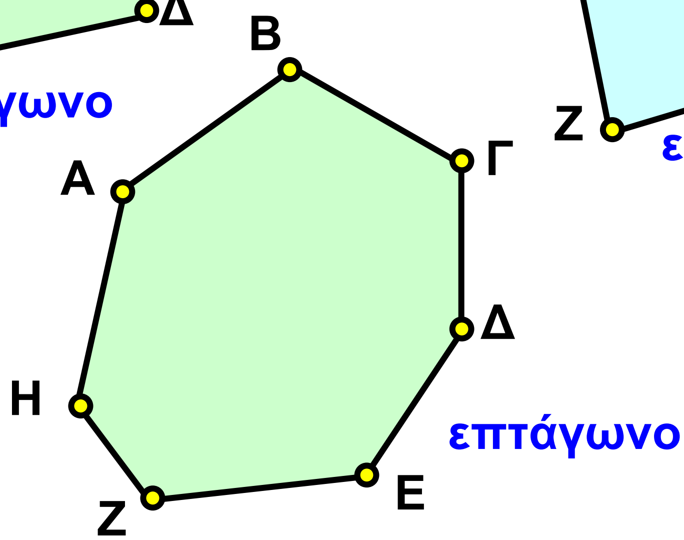
Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές.



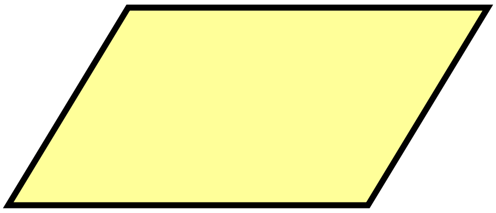
Μπορούμε να σχηματίσουμε και πολύγωνα με 5, 6, 7, ... κορυφές, τα οποία αντίστοιχα λέγονται πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο.....κ.τ.λ.





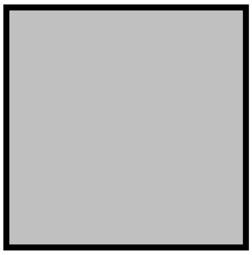


● Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε **ν-γωνο**. Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο.

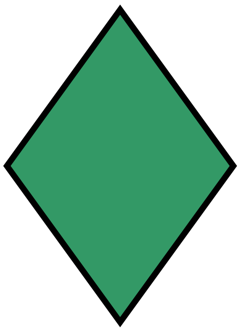


παραλληλόγραμμο

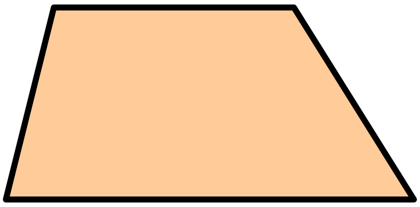
ορθογώνιο



τετράγωνο

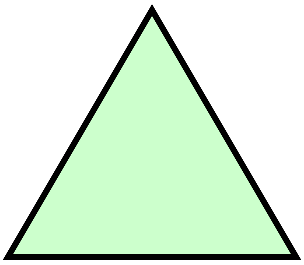


ρόμβος

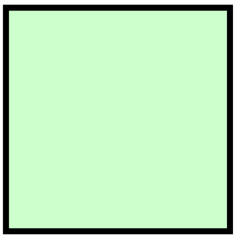


τραπέζιο

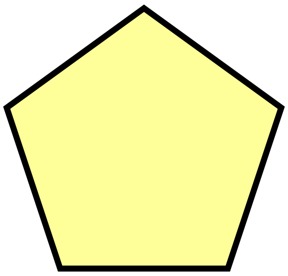
● Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες. π.χ.



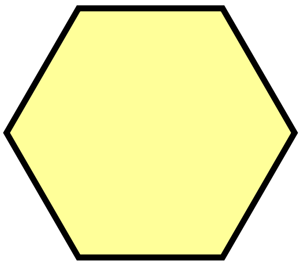
Ισόπλευρο τρίγωνο



Τετράγωνο



Κανονικό πεντάγωνο



Κανονικό εξάγωνο

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να χωρίσετε έναν κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΔΕ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΕΖ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΖΑ}}$.

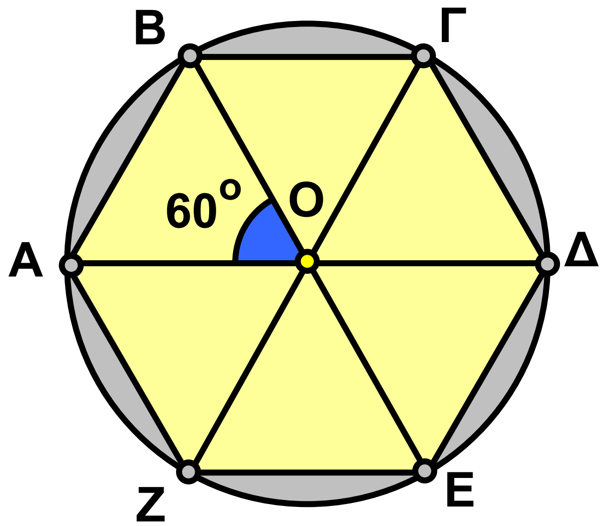
β) Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ;

γ) Τι είδους πολύγωνο είναι το ΑΒΓΔΕΖ;

Λύση

α) Αφού όλος ο κύκλος έχει μέτρο 360^{o}, για να τον χωρίσουμε σε έξι ίσα τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο

$$\frac{360^{o}}{6} = 60^{o}.$$



Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες $\omega = 60^{o}$, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα.

β) Γνωρίζουμε από την Α΄ Γυμνασίου ότι ίσα τόξα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές, επομένως: ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.

γ) Η γωνία ΑΒΓ του εξαγώνου είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου με αντίστοιχο τόξο, μέτρου:

$$\overset{\frown}{\text{ΑΖ}} + \overset{\frown}{\text{ΖΕ}} + \overset{\frown}{\text{ΒΔ}} + \overset{\frown}{\text{ΔΓ}} = 60^{o} + 60^{o} + 60^{o} + 60^{o} = 240^{o}.$$

Επομένως, $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = \frac{1}{2}\,240^{o} = 120^{o}.$

Ομοίως, έχουμε ότι:

$\hat{ΒΓΔ} = \hat{ΓΔΕ} = \hat{ΔΕΖ} = \hat{ΕΖΑ} = \hat{ΖΑΒ} = 120^o$.

Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, οπότε είναι κανονικό.

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

1ο βήμα:
Υπολογίζουμε τη γωνία $ω = \frac{360^o}{ν}$

2ο βήμα:
Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ω, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

3ο βήμα:
Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

Είδαμε ότι με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζεται ένα κανονικό εξάγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πολυγώνου.

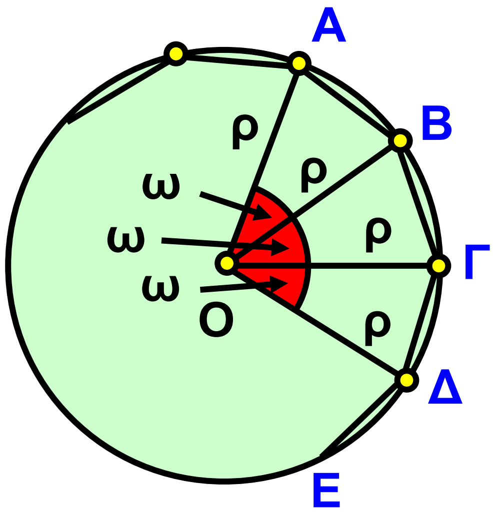
Επίσης, λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο κύκλο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε ένα κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και γενικά ένα κανονικό ν-γωνο.

Γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου

➤ Κεντρική γωνία ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).

Είδαμε προηγουμένως ότι για να χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, θεωρούμε ν διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$.



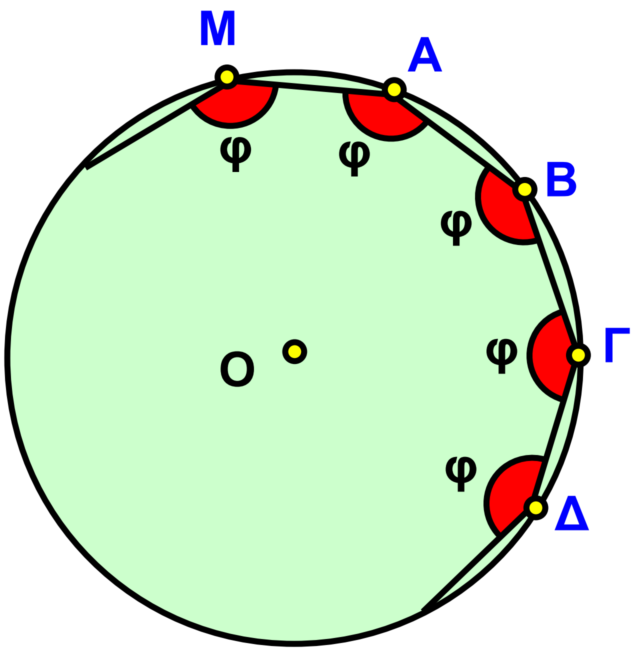
Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται κεντρική γωνία του κανονικού ν-γώνου.

Επομένως:

> **Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με** $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$ **.**

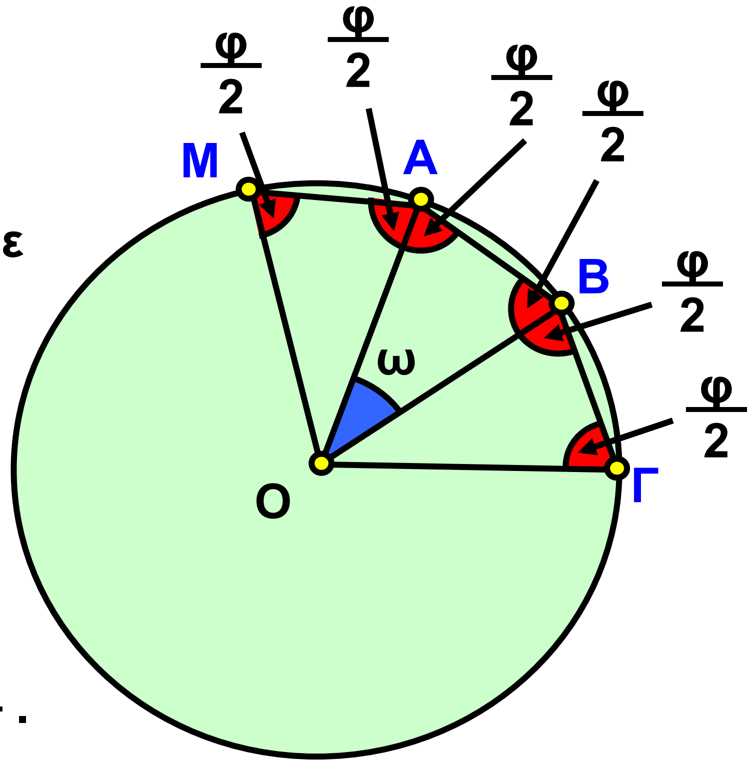
➤ Γωνία ν-γώνου

Σε οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο οι γωνίες $\hat{MAB}$, $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{B\Gamma\Delta}$, **... κ.ο.κ. είδαμε ότι είναι ίσες, αφού είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και τις συμβολίζουμε με φ.**



● Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία του κανονικού ν-γώνου.**

Ας δούμε τη σχέση της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ του ν-γώνου. Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\frac{\varphi}{2}$.



Στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι:

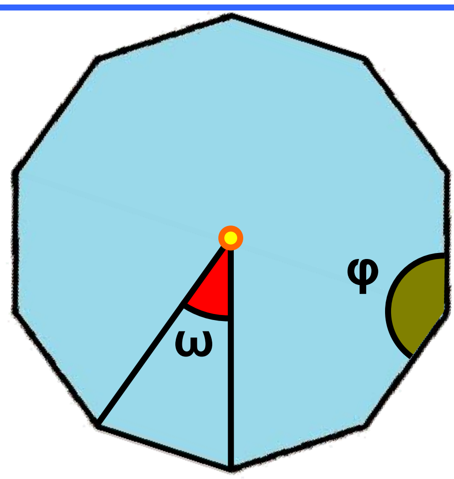
$\omega + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 180^o$ ή $\omega + \varphi = 180^o$ ή $\boxed{\varphi = 180^o - \omega}$

Επομένως:

Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.
β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162^o.



Λύση: α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:

$$\varphi = 180^o - \omega = 180^o - \frac{360^o}{10} = 180^o - 36^o = 144^o.$$

β) ισχύει ότι: $\varphi = 180^o - \omega$ ή $162^o = 180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$ ή

$\dfrac{360^o}{\nu} = 180^o - 162^o$ ή $\dfrac{360^o}{\nu} = 18^o$ ή

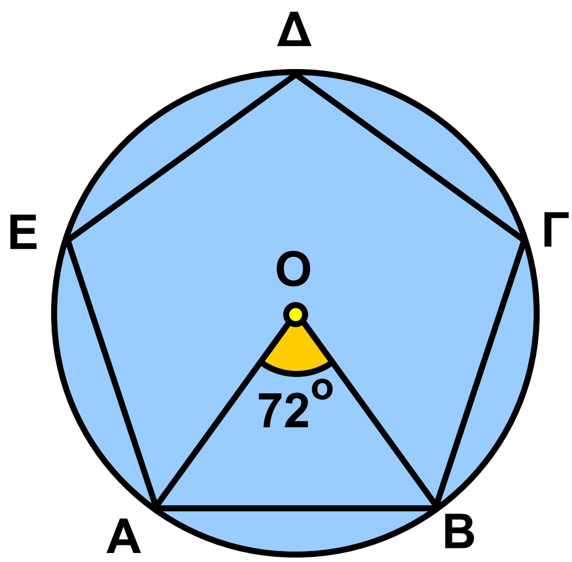
$\nu = \dfrac{360^o}{18^o}$ ή $\nu = 20$.

Δηλαδή το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία $\varphi = 162^o$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

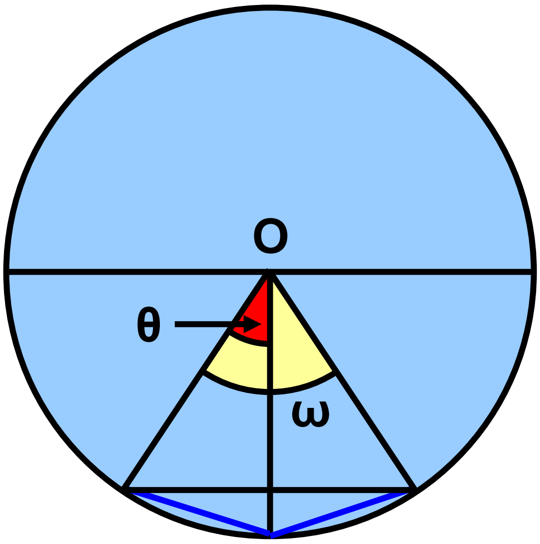
Λύση:
- Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $\hat{AOB} = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$.
- Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το ΑΒ.
- Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση: Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι $ω = \dfrac{360^o}{ν}$ και $θ = \dfrac{360^o}{2ν}$.



Επομένως, $θ = \dfrac{ω}{2}$.

Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές. Οι διχοτόμοι, όπως γνωρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στους επόμενους πίνακες να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου είναι:

Α	Β	Γ
120^o	30^o	60^o

β) Η κεντρική γωνία κανονικού δωδεκάγωνου είναι:

Α	Β	Γ
120^o	30^o	60^o

γ) Η κεντρική γωνία κανονικού πενταγώνου είναι:

Α	Β	Γ
52^o	72^o	132^o

δ) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 36^o. Το πλήθος των πλευρών του είναι:

Α	Β	Γ
6	10	12

ε) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 10^o. Το πλήθος των πλευρών του είναι:

Α	Β	Γ
12	24	36

2. Στους επόμενους πίνακες να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 40^o. Η γωνία του πολυγώνου είναι:

Α	Β	Γ
50^o	90^o	140^o

β) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 72^o. Η γωνία του πολυγώνου είναι:

Α	Β	Γ
108^o	18^o	172^o

γ) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 30^o. Η γωνία του πολυγώνου είναι:

Α	Β	Γ
150^o	30^o	60^o

3. **Στους παρακάτω πίνακες να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.**

Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 15 πλευρές.		
α) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
15^o	24^o	30^o
β) Η γωνία του πολυγώνου είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
24^o	156^o	72^o

Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 150^o		
γ) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
15^o	24^o	30^o
δ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
15	12	8

Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135^o		
ε) Η κεντρική γωνία του είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
35^o	45^o	65^o
στ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:		
Α	**Β**	**Γ**
8	12	18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3		
5		
6		
10		

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15^{o}	
	150^{o}
72^{o}	
	160^{o}

2 Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

3 Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού εξαγώνου και να επαληθεύσετε ότι: $\omega + \varphi = 180^{o}$.

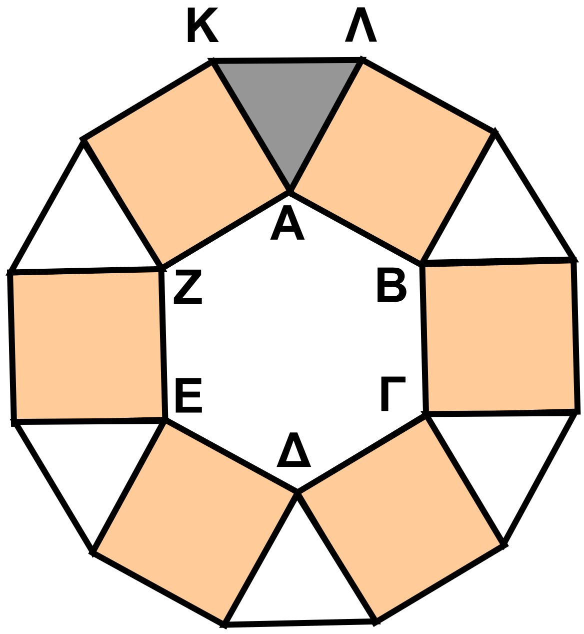
4 Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:
α) με κεντρική γωνία $ω = 16^o$.
β) με γωνία $φ = 130^o$.

6 Να κατασκευάσετε κανονικό οκτάγωνο.

7 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

8 Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξάγωνου, κατασκευάζουμε τετράγωνα εξωτερικά του εξαγώνου.
Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι και κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

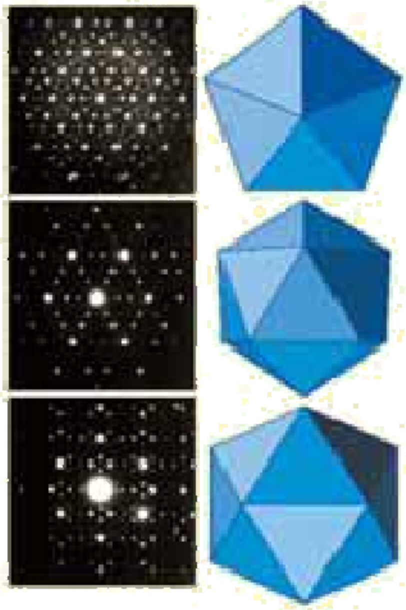
Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο «συμμετρικός» τρόπος χρωματισμού.

Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για το λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.

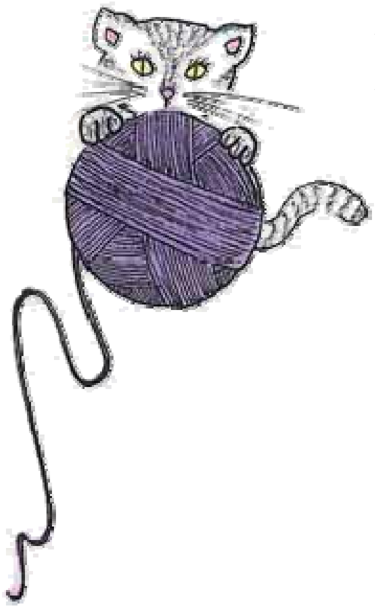
Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ου αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.



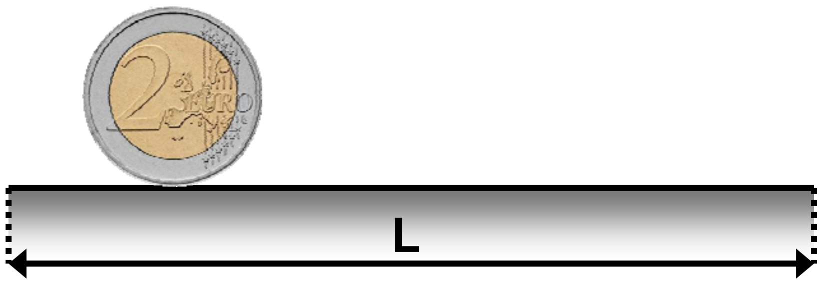
Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

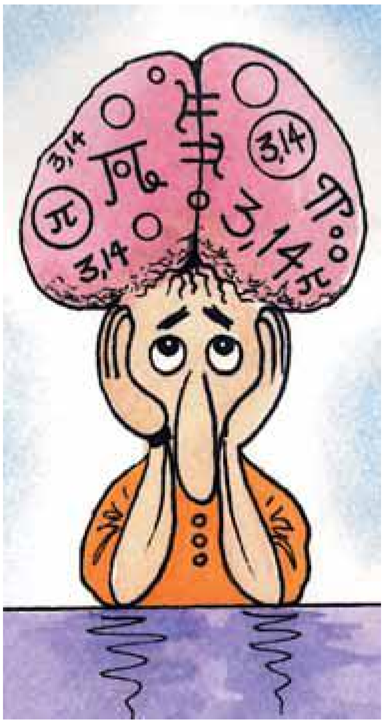
3.3. Μήκος κύκλου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Ας θεωρήσουμε ένα νόμισμα των 2 €. Αφού μετρήσετε τη διάμετρο του δ, να βάλετε μελάνι γύρω - γύρω από το νόμισμα και να το κυλίσετε κάθετα στο χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή.





α) Το μήκος L που διαγράφει είναι το μήκος του κύκλου.
Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$\delta =$	
$L =$	
$\frac{L}{\delta} =$	

β) Ας δούμε κατόπιν μερικές προσεγγιστικές μετρήσεις από την Αστρονομία για την «περιφέρεια» και τις διαμέτρους κάποιων πλανητών. Συμπληρώστε το διπλανό πίνακα:

Πλανήτες	L	δ	$\frac{L}{\delta}$
Ερμής	15320 km	4879 km	
Αφροδίτη	38006,6 km	12104 km	
Άρης	21333,2 km	6794 km	
Γη	40053,8 km	12756 km	
Σελήνη	10914,6 km	3476 km	

Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

δ =	2,5 cm
L =	7,85 cm
$\frac{L}{\delta}$ =	3,14 cm

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{L}{\delta}$ είναι περίπου 3,14 για όλους τους πλανήτες. Αυτός ο σταθερός λόγος ονομάστηκε από τους αρχαίους Έλληνες ως «ο αριθμός π», ο πιο διάσημος και αξιοσημείωτος απ' όλους τους αριθμούς (βλέπε Ιστορικό σημείωμα). Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta} = \pi$, προκύπτει ότι:

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:
$L = \pi\,\delta$ ή $L = 2\,\pi\,\rho$

Παρατήρηση:
Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον π την προσεγγιστική τιμή 3,14.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση: Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$L = 2\pi\rho$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9{,}42}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}5$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση: Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$.

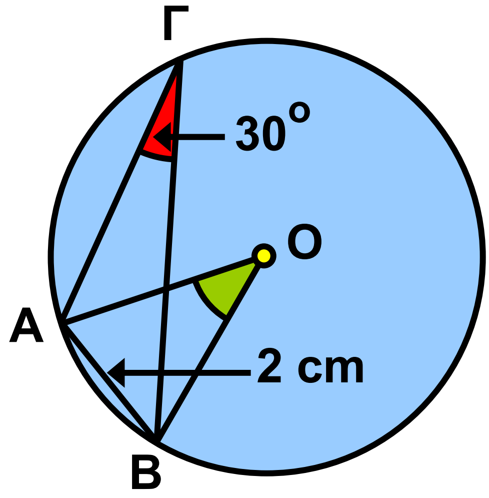
Επομένως: $\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2\pi}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2 \cdot 3{,}14}$

ή $\rho 1 = \rho 2 + 1{,}59$.

Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο παρακάτω σχήμα.



Λύση: Η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με 30^o, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{O}B = 2 \cdot 30^o = 60^o$. Επομένως το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι: L = 2πρ = 2 · 3,14 · 2 = 12,56 cm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	Μήκος κύκλου L
5 cm	
	37,68 cm
4 cm	
3 cm	
	12,56 cm
9 cm	

2. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:

Α: διπλασιάζεται

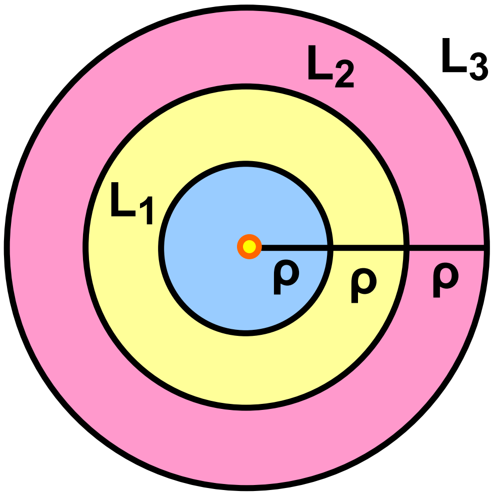
Β: τριπλασιάζεται

Γ: τετραπλασιάζεται

Δ: παραμένει το ίδιο.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ, 2ρ, 3ρ αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:



$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2p}$	$\frac{L_2}{4p}$	$\frac{L_3}{6p}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος έχει μήκος 20 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

2 Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,5 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού.

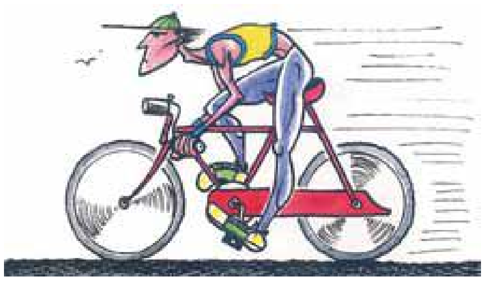
3 Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 2 προς 1. Να βρείτε το λόγο:
α) των διαμέτρων τους.
β) των ακτίνων τους.

5 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5 cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

6 Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν ρ_A = 2 cm και ρ_B = 8 cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

7 Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20 km/h;



8 Γνωρίζουμε ότι ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος 40.000 km περίπου. Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαιρική να βρείτε την ακτίνα της.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971...

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, -όπως λέγεται- αριθμός που συναντάται στη φύση. Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο π θεωρούνταν ίσος με

το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο π είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $(\frac{8}{9}\delta)^2$, όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε, $\pi \approx 3{,}16049...$

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν μέθοδο για τον υπολογισμό του π. Το συνδύασαν με ένα από τα επιστημονική περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.

Εκτιμήσεις του π

Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρουν προσεγγίσεις του π με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \leq \pi \leq 3\frac{10}{70}$

$$3{,}14085 \leq \pi \leq 3{,}142857$$

$$\pi \approx 3\frac{1}{7} \quad \text{ή} \quad \frac{22}{7}$$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}$ (= 3,1416…)

TSU CHUNG-CHI (Κίνα):
$3{,}1415926 \le \pi \le 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL-KASHI (15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.

LUDOLPH VAN CEULEN: 20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.

SNELL: 34 ψηφία.

VIETE (1592):

πρώτος τύπος: $$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\bullet\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

JOHN WALLIS: $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ \ldots$$

LEIBNIZ (1673): $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ \ldots$$

JOHN MACHIN (1706): 100 δεκαδικά ψηφία

JOLIANN DASE (1824 - 1861): 200

WILLIAM SHANKS (1853): 707

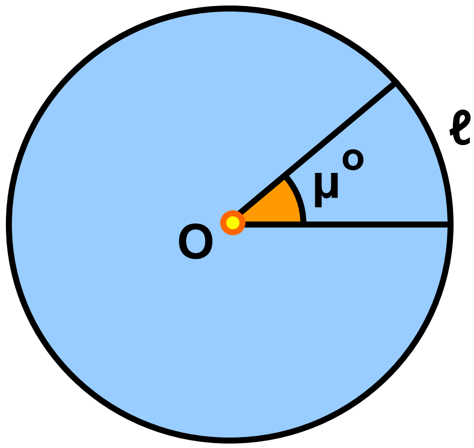
ENIAC (H/Y)(1949): 2037

CDC 6600 (1967): 500.000

Ιαπωνική Ομάδα (1993): 16.777.216 (=2^{24}).

3.4. Μήκος τόξου

Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την **απλή μέθοδο** των τριών.



Ένα τόξο 360^{o} (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος 2πρ.
Ένα τόξο μ^{o} πόσο μήκος έχει;

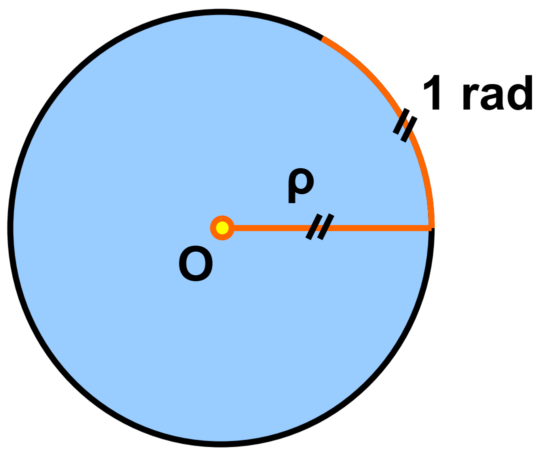
Τόξο	Μήκος
360^{o}	$2\pi\rho$
μ^{o}	ℓ

Έχουμε: $\dfrac{360}{2\pi\rho} = \dfrac{\mu}{\ell}$ ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

Το μήκος ενός τόξου μ^{o} ισούται με: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

Ακτίνια (rad)

Αρκετές φορές ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου θεωρούμε το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα ρ του κύκλου. Αυτή η μονάδα μέτρησης λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**.



Αν χρησιμοποιήσουμε ακτίνια, τότε:

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $\ell = \alpha\rho$.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360} \qquad\qquad \ell = \alpha\rho$$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή

$$\pi \cdot \frac{\mu}{180} = \alpha \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}\ .$$

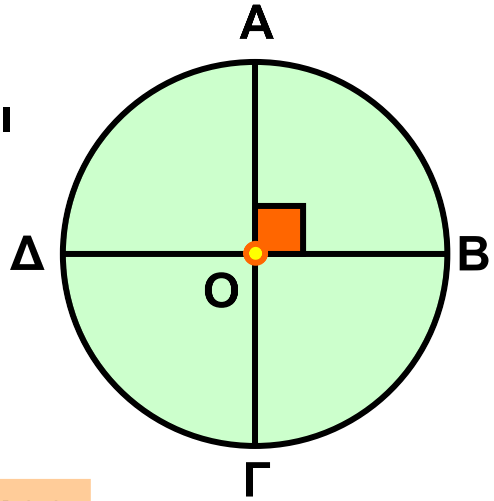
Η αναλογία αυτή εκφράζει τη σχέση των μοιρών με τα ακτίνια.

Σχόλιο:

Ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα από δύο κάθετες διαμέτρους:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.

Καθένα από αυτά τα τόξα έχει μέτρο 90^{o} και ονομάζεται τεταρτοκύκλιο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω τόξα:

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad},\quad 25^o,\quad 48^o,\quad \frac{3\pi}{2} \text{ rad},\quad 225^o,\quad \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Λύση: Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα τόξα, θα πρέπει είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε μοίρες είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε rad. Ας κάνουμε και τις δύο μετατροπές:

Μοίρες	$\frac{\pi}{4} = 45^o$	25^o	48^o
rad	$\frac{\pi}{4}$	$25^o = \frac{5\pi}{36}$	$48^o = \frac{4\pi}{15}$

Μοίρες	$\frac{3\pi}{2} = 270^o$	225^o	$\frac{11\pi}{6} = 330^o$
rad	$\frac{3\pi}{2}$	$225^o = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Επομένως, ισχύει ότι:

$25^o < 45^o < 48^o < 225^o < 270^o < 330^o$

ή $\frac{5\pi}{36} < \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα τόξο 30^o έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι :

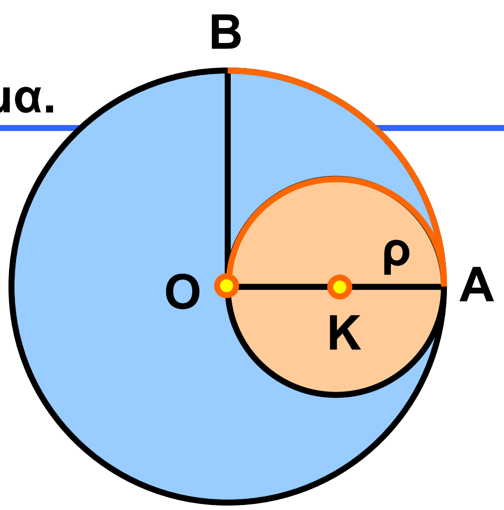
$$\ell = 2\pi\rho \frac{\mu}{360}, \text{ οπότε έχουμε διαδοχικά:}$$

$$1{,}3 = \pi\rho \frac{30}{180} \quad \text{ή} \quad 1{,}3 = \pi\rho \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad \pi\rho = 7{,}8 \quad \text{ή}$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} = 2{,}48 \text{ (cm)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο διπλανό σχήμα είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.



Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AO}$ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:

$$\ell_1 = 2\pi\rho \frac{180}{360} = \pi\rho.$$

Στον κύκλο (Ο,2ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο, οπότε έχει μήκος: $\ell_2 = 2\pi \bullet (2\rho) \dfrac{90}{360} = \pi\rho.$

Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος.

Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα των τόξων της πρώτης γραμμής από μοίρες σε ακτίνια (rad) της δεύτερης γραμμής.

Μοίρες	90^{o}	60^{o}	180^{o}	270^{o}	45^{o}	360^{o}
Ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Αν το μήκος ℓ ενός τόξου μ^{o} είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: $\mu = 45^{o}$ Β: $\mu = 90^{o}$ Γ: $\mu = 60^{o}$ Δ: $\mu = 180^{o}$

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

3. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:

Τόξο σε μοίρες	30^{o}			
Τόξο σε ακτίνια		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

Τόξο σε μοίρες	100^{o}		60^{o}	270^{o}
Τόξο σε ακτίνια		$\frac{7\pi}{6}$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες		15^o			180^o
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	

2 Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας $\rho = 8$ cm.

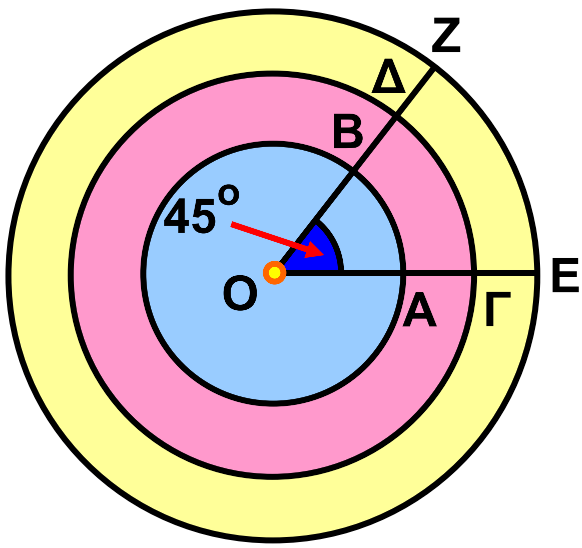
3 Σ' έναν κύκλο που έχει μήκος 188,4 cm να βρείτε το μήκος τόξου 30^o.

4 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα $\rho = 10$ cm.

5 Ένα τόξο 45^o έχει μήκος 15,7 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

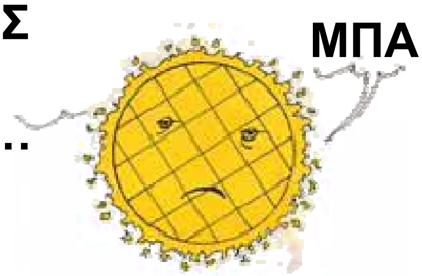
6 Δίνονται 2 τόξα π ακτινίων. Να εξετάσετε αν είναι πάντοτε ίσα.

7 Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων 1 cm, 1,5 cm και 2 cm και μια επίκεντρη γωνία 45^o. Να βρείτε τα μήκη των τόξων που αντιστοιχούν στη γωνία αυτή.

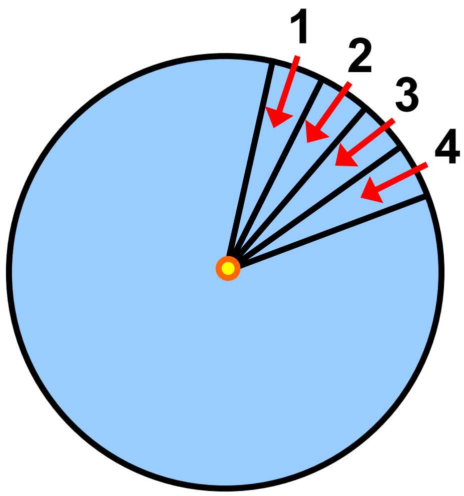


3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

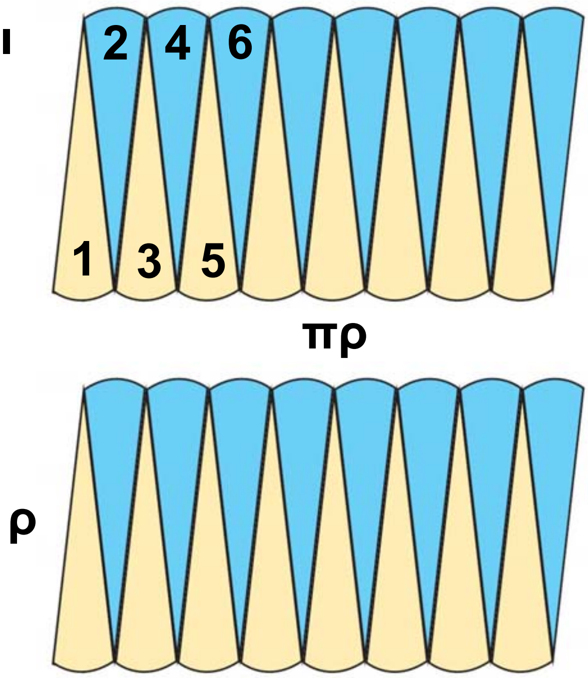
Ο ΘΕΟΣ ΗΛΙΟΣ ΕΓΙΝΕ…



ΜΠΑΚΛΑΒΑΣ!



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με πρ, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με ρ • πρ.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $E = \pi\rho^2$

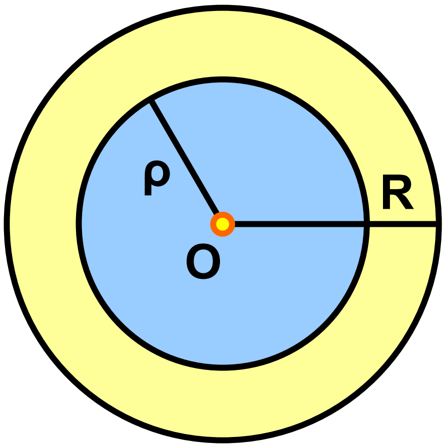
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση: Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi\rho$, δηλαδή $6{,}28 = 2 \cdot 3{,}14\ \rho$, οπότε $\rho = 1$ (cm).
Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:
$E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος. Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση: Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών $E_1 = \pi R^2$ και $E_2 = \pi\rho^2$ των δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως, $E = E_1 - E_2 = \pi R^2 - \pi\rho^2$.
Αφού $E = E_2$, θα έχουμε:

$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2$ ή $\pi R^2 = 2\pi\rho^2$ ή $R^2 = 2\rho^2$ ή

$R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$. Οπότε: $R = 2$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σε τρία μεγέθη: τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά.

Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση: Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα.

Η μικρή έχει εμβαδόν:

$$E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^2 = 415{,}27\ (cm^2).$$

Η μεσαία έχει εμβαδόν:

$$E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615{,}44\ (cm^2).$$

Η μεγάλη έχει εμβαδόν:

$$E_1 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 = 854{,}87\ (cm^2).$$

Το κόστος του 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι:

Μικρή	$\frac{700}{415{,}27} = 1{,}69$ (λεπτά/cm^2)
Μεσαία	$\frac{850}{615{,}44} = 1{,}38$ (λεπτά/cm^2)
Μεγάλη	$\frac{1190}{854{,}87} = 1{,}39$ (λεπτά/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Η ακτίνα του είναι ίση με:

Α: 4 Β: 2 Γ: 6 Δ: 5.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 4 cm. Το εμβαδόν του είναι:

Α: 12 cm^2 Β: $\frac{4}{\pi}$ cm^2 Γ: 9 cm^2 Δ: 16 cm^2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν του:

Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται

Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	Εμβαδόν κύκλου Ε
5 cm	
	28,26 cm^2
2,5 cm	
	942 cm^2

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

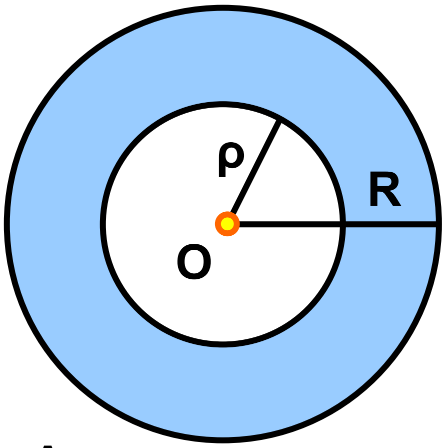
Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		
ρ cm		
2ρ cm		
3ρ cm		
4ρ cm		

Τι παρατηρείτε;

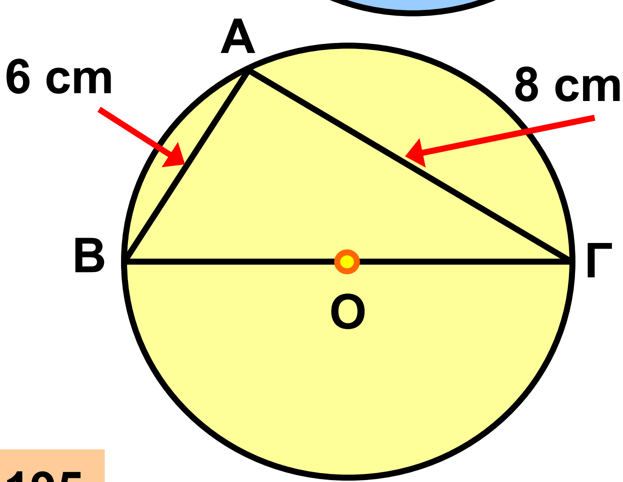
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος (Ο, ρ) έχει διάμετρο 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει τετραπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο, ρ).

2 Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.



3 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



4 Ένας κύκλος έχει ακτίνα 10 cm. Να κατασκευάσετε κυκλικό δίσκο με διπλάσιο εμβαδόν.

5 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να βρεθεί (κατά προσέγγιση) η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου που είναι ισοδύναμος (δηλαδή έχει το ίδιο εμβαδόν) με το τετράγωνο.

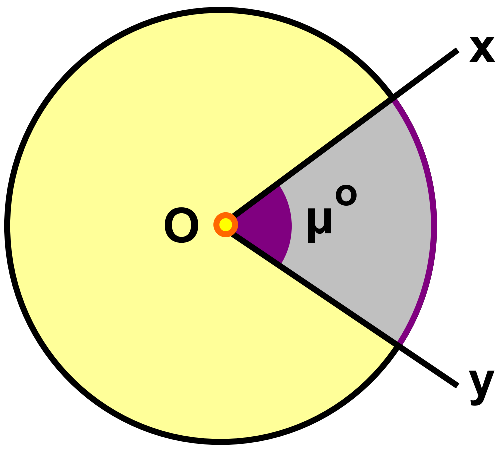
6 Λυγίζουμε ένα σύρμα μήκους 1,256 m, ώστε να σχηματίσει κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί στο συρμάτινο κύκλο.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς $\alpha = 6$ cm.

8 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 144π cm^2. Να βρείτε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°.

3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ας θεωρήσουμε ένα κύκλο (Ο, ρ) και μια επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ μέτρου μ^o. Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στη γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται **κυκλικός τομέας γωνίας μ^o** του κύκλου (Ο, ρ).



Αν η επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ είναι μέτρου μ^o, τότε και το αντίστοιχο τόξο της έχει μέτρο μ^o, οπότε βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:

Τόξο σε μοίρες	360^o	μ^o
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$\frac{360}{\pi\rho^2} = \frac{\mu}{E} \quad \text{ή} \quad E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}$$

Αν το τόξο έχει μετρηθεί σε ακτίνια και ισούται με α rad, τότε πάλι έχουμε:

Τόξο σε ακτίνια (rad)	2π	α
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\rho^2\alpha}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\rho^2}$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα ρ = 20 m. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει μια δέσμη φωτός που φωτίζει ένα κυκλικό τομέα γωνίας 50^o.

α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που φωτίζεται.

Λύση

α) Το εμβαδόν της πλατείας είναι:

$E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256\ (m^2)$.

β) Γνωρίζουμε ότι όλη η πλατεία αντιστοιχεί σε τόξο 360^o και έχει εμβαδόν 1256 m^2. Για να βρούμε το εμβαδόν ε του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο 50^o, χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο των τριών, οπότε:

360^o	50^o
1256	ε

$$\frac{360}{1256} = \frac{50}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \varepsilon = 1256 \cdot \frac{50}{360} = 174{,}44\ (m^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

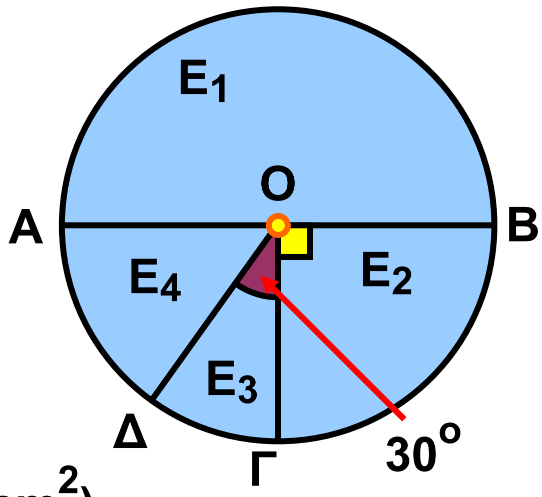
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα στον στίβο της σφαιροβολίας ακτίνας ρ = 24 m και γωνίας 65^o.

Λύση: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360} = 3{,}14 \cdot 24^2 \cdot \frac{65}{360} = 326{,}56\ (m^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο παρακάτω κύκλος έχει διάμετρο ΑΒ και εμβαδόν 40 cm^2. Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4.



Λύση: Έχουμε ότι:

$\widehat{ΔΟΓ} = 30^o$, $\widehat{ΓΟΒ} = 90^o$

και $\widehat{ΔΟΑ} = 90^o - \widehat{ΔΟΓ} =$

$= 90^o - 30^o = 60^o$

Επομένως:

$E_1 = (πρ^2)\ \dfrac{180}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{2} = 20\ (cm^2).$

$E_2 = (πρ^2)\ \dfrac{90}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{4} = 10\ (cm^2).$

$E_3 = (πρ^2)\ \dfrac{30}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{12} = 3{,}33\ (cm^2).$

$E_4 = (πρ^2)\ \dfrac{60}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{6} = 6{,}67\ (cm^2).$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν κυκλικού τομέα
ρ = 2 cm	$μ = 60^o$	
	$μ = 45^o$	$E = 8π\ cm^2$
ρ = 3 cm		$E = 3π\ cm^2$

2. Σ’ έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ... (cm) ο κυκλικός τομέας γωνίας 120^o έχει μήκος τόξου 6π (cm) και εμβαδόν .... (cm^2). Να συμπληρώσετε τα κενά.

3. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι 12 cm. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 60^o έχει εμβαδόν:

Α: 24π (cm^2) Β: 36π (cm^2)

Γ: 54π (cm^2) Δ: 108π (cm^2).

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι 12,56 cm^2 και η γωνία του είναι 90^o, η ακτίνα του κύκλου είναι:

Α: 2 cm, Β: 4 cm, Γ: 9 cm, Δ: 7 cm.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του κύκλου:

Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται

Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

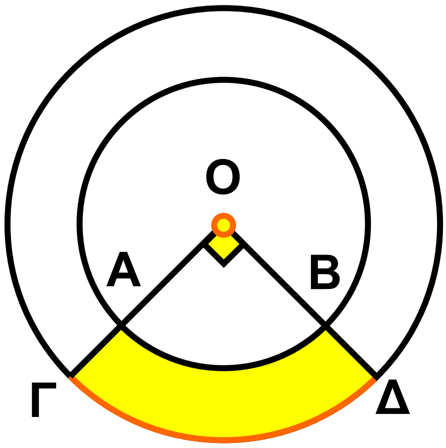
1 Να υπολογιστεί η γωνία κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν ίσο με το $\frac{1}{8}$ του εμβαδού του κύκλου.

2 Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 30^{o} έχει εμβαδόν $1\ m^2$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

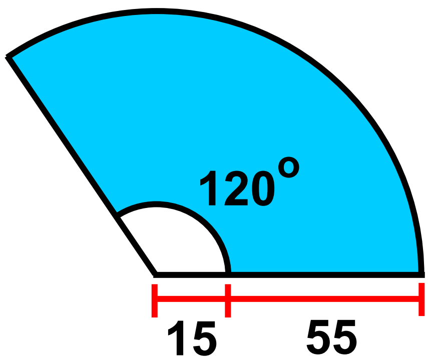
3 Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $1256\ cm^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 36^{o}.

4 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας 45^{o} είναι $20{,}25\pi\ cm^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

5 Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $\rho_1 = 3$ cm και $\rho_2 = 4$ cm αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

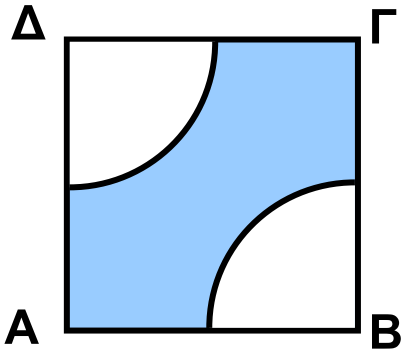


6 Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 120^{o}, να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.

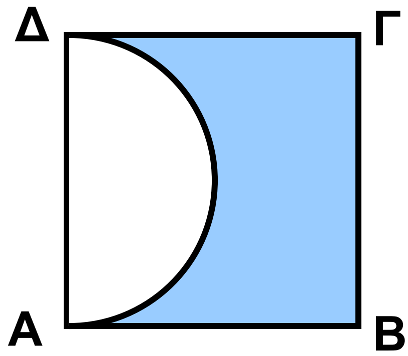


7 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων καμπυλόγραμμων επιφανειών στα τετράγωνα της σελίδας 57:

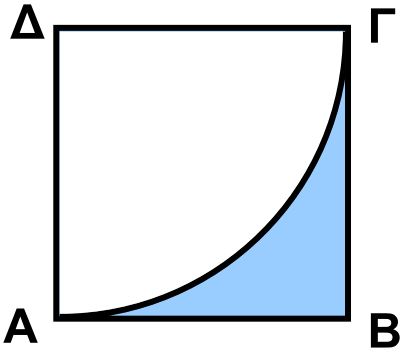
α) ΑΒ = ΒΓ = 8 cm



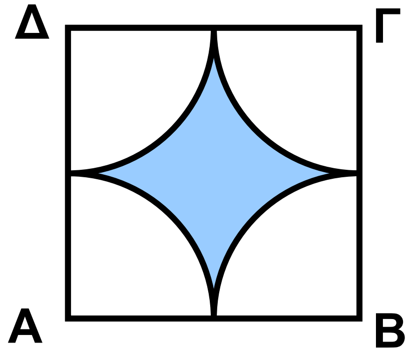
β) ΑΒ = 8 cm



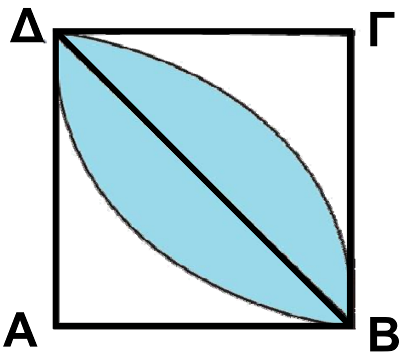
γ) ΑΒ = 8 cm



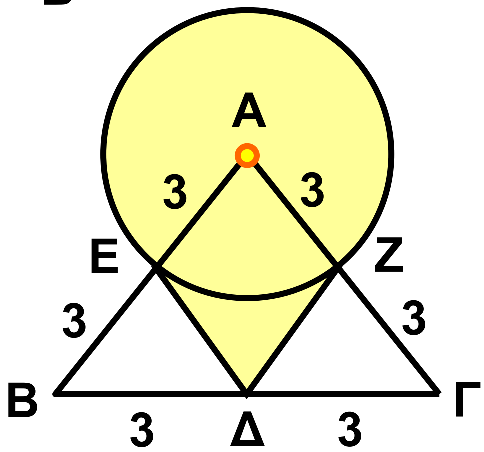
δ) ΑΒ = 8 cm



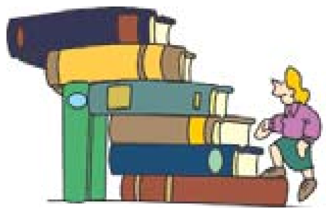
ε) ΑΒ = 8 cm



8 Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο σχήμα, αν οι αριθμοί εκφράζουν τα μήκη των αντίστοιχων τμημάτων σε cm.



Επανάληψη Κεφαλαίου 3



Μέτρηση Κύκλου

- **Εγγεγραμμένες γωνίες** ενός κύκλου που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** ή σε **ίσα τόξα** είναι μεταξύ τους **ίσες**.

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

- Κανονικό πολύγωνο: ίσες πλευρές, ίσες γωνίες

- Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου: $\omega = \dfrac{360^o}{\nu}$

- Γωνία κανονικού ν-γώνου: $\varphi = 180^o - \omega$

- Μήκος κύκλου: $\dfrac{L}{\delta} = \pi$ ή $L = 2\pi\rho$

- Μήκος τόξου: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $\ell = \alpha\rho$

- Εμβαδό κυκλικού δίσκου: $E = \pi\rho^2$

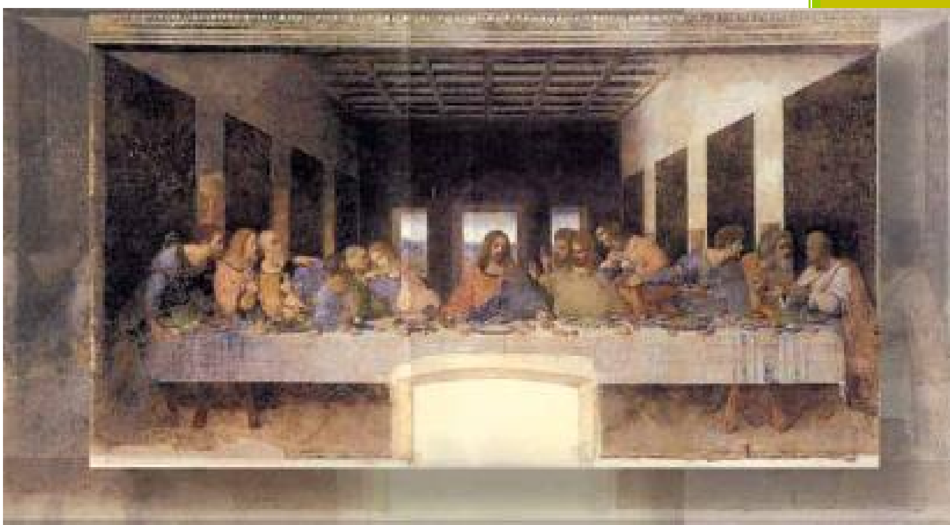
- Εμβαδό κυκλικού τομέα: $E = \pi\rho^2 \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $E = \dfrac{\alpha\rho^2}{2}$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Γεωμετρικά Στερεά

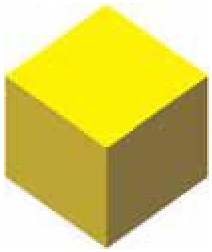
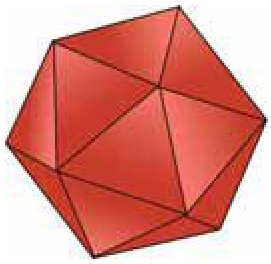
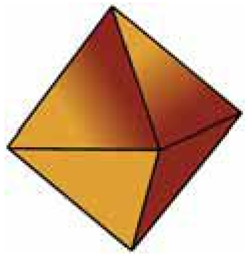
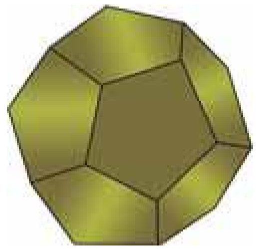
Η Γεωμετρία του Χώρου αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια, εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της στην καθημερινή ζωή.



Μέτρηση Στερεών

Θα μας απασχολήσει η μελέτη στερεών σωμάτων, όπως το πρίσμα, ο κύλινδρος, η πυραμίδα, ο κώνος και η σφαίρα. Θα εξετάσουμε τα στοιχεία τους και τη μέτρηση των επιφανειών τους και του όγκου τους (Στερεομετρία).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

4.1 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του

4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της

4.7 Γεωγραφικές συντεταγμένες

Ο Χώρος

Ο φυσικός κόσμος στον οποίο ζούμε και όλα τα άψυχα αντικείμενα, καθώς και τα έμψυχα όντα που μας περιβάλλουν, αποτελούν τον «χώρο».

Τα σχήματα του χώρου διακρίνονται σε επίπεδα και στερεά και αποτελούνται από επιφάνειες, γραμμές και σημεία.

Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις και διακρίνουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, οι γραμμές έχουν μία διάσταση και τα σημεία καμία.

Η Γεωμετρία του χώρου είναι η επιστήμη που μελετά τα στερεά σώματα και τις ιδιότητές τους στον χώρο.

Η Στερεομετρία ασχολείται με τη μέτρηση των όγκων των διαφόρων στερεών σχημάτων: των πρισμάτων, των κυλίνδρων, της σφαίρας κ.ο.κ.

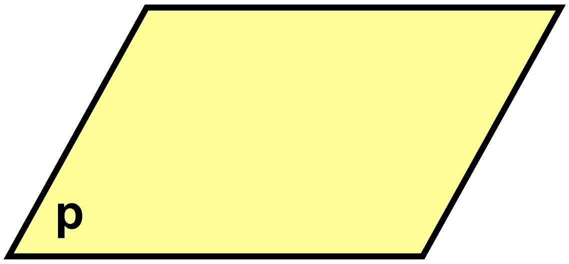
Ο χώρος έχει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα. Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τη σφαίρα και κάποια κανονικά πολύεδρα, αλλά οι Πλατωνιστές ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν εκτεταμένα με τα κανονικά πολύεδρα. Το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο ονομάζονται Πλατωνικά Στερεά. Ονομάζονται επίσης και Κοσμικά Στερεά, καθώς στη Φιλοσοφία του Πλάτωνα συμβόλιζαν αντίστοιχα την φωτιά, τη γη, το νερό, τον αέρα και την «πέμπτη ουσία» (quinta essentia).
Η μελέτη του κύβου, του τετράεδρου και του δωδεκάεδρου πρέπει να έγινε από τους Πυθαγόρειους˙ ο Θεαίτητος μελέτησε το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, ενώ ο Εύδοξος θεμελίωσε τη μέτρηση τους.
Η Στερεομετρία αποτελεί σημαντικό μέρος της καθημερινής μας ζωής: από μία απλή παραγγελία ταπετσαρίας για το δωμάτιό μας έως το σχεδιασμό κτιρίων στην Αρχιτεκτονική. Δεν είναι όμως και λίγες οι επιδράσεις της στην Τέχνη: ζωγραφική, γλυπτική κ.ά.
Η εξαιρετική χρήση της αίσθησης του χώρου μέσα από τη Γεωμετρία έγινε φανερή κατά την Αναγέννηση. Η Αναγέννηση διέθετε δύο βασικά χαρακτηριστικά: την έμφαση στο σχήμα και την έμφαση στο χρώμα. Ο μόνος, ίσως, ζωγράφος που έφθασε στο ανώτατο επίπεδο και στα δύο ήταν ο Leonardo da Vinci, ο οποίος έδωσε στην Επιπεδομετρία και τη Στερεομετρία μια διάσταση άγνωστη στις προηγούμενες γενιές. Ο «Μυστικός Δείπνος» του da Vinci στην εκκλησία Santa Maria della Grazie στο Μιλάνο είναι ένα έξοχο δείγμα της χρήσης των γνώσεων Στερεομετρίας στην Τέχνη και εκπλήσσει με την άμεση αίσθηση του χώρου που δίνει στο θεατή.

Η Γεωμετρία του χώρου βρίσκει σημαντικές εφαρμογές και σε άλλες επιστήμες. Στη Βιολογία και στην Ιατρική η μελέτη του εγκεφάλου ή και άλλων οργάνων του σώματος γίνεται με έντονη την παρουσία εννοιών της Στερεομετρίας. Στη Χημεία η δομική ταξινόμηση των οργανικών ενώσεων γίνεται με ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων της Στερεομετρίας. Στη Σεισμολογία, οι προσομοιώσεις των κινήσεων των τεκτονικών πλακών ακολουθούν «γεωμετρικούς κανόνες» στο χώρο.

Οι εφαρμογές της Γεωμετρίας του Χώρου είναι πολλές αναδεικνύοντας τη γνώση της Στερεομετρίας σε ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής μας ζωής, της Τέχνης και της Επιστήμης.

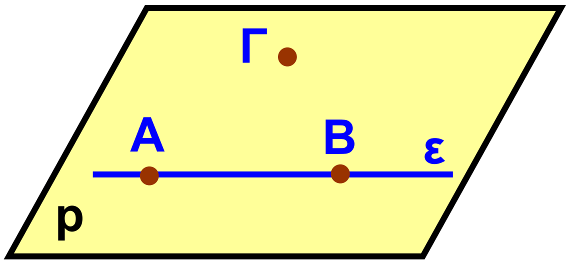
4.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Ευθείες και Επίπεδα



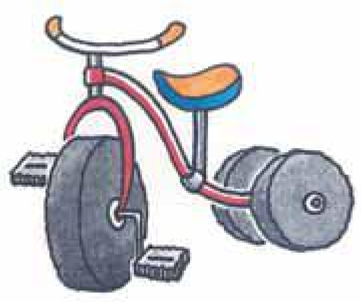
Οι πρωταρχικές έννοιες του χώρου – γνωστές ήδη από την εμπειρία μας – είναι το **σημείο**, η **ευθεία** και το **επίπεδο**. Τα επίπεδα τα έχουμε συνδέσει στο φυσικό κόσμο με την αίσθηση των επιφανειών.

Η επιφάνεια του μαυροπίνακα, ενός λείου πατώματος, ενός καθρέπτη μάς δίνουν την αίσθηση του επιπέδου.



Ωστόσο, το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα και για να το παραστήσουμε, σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο για να χωράει στην επιφάνεια του χαρτιού. Το ονομάζουμε, επίσης μ’ ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου (p, q, r).

Μία ευθεία **ε** ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δύο σημεία **Α** και **Β**. Αν θεωρήσουμε ένα τρίτο σημείο **Γ** που δεν ανήκει στην ευθεία **ε**, τότε τα τρία αυτά σημεία **Α**, **Β**, και **Γ** ορίζουν ένα επίπεδο **p**. Προφανώς, η ευθεία **ε** και το σημείο **Γ** ορίζουν το ίδιο επίπεδο.

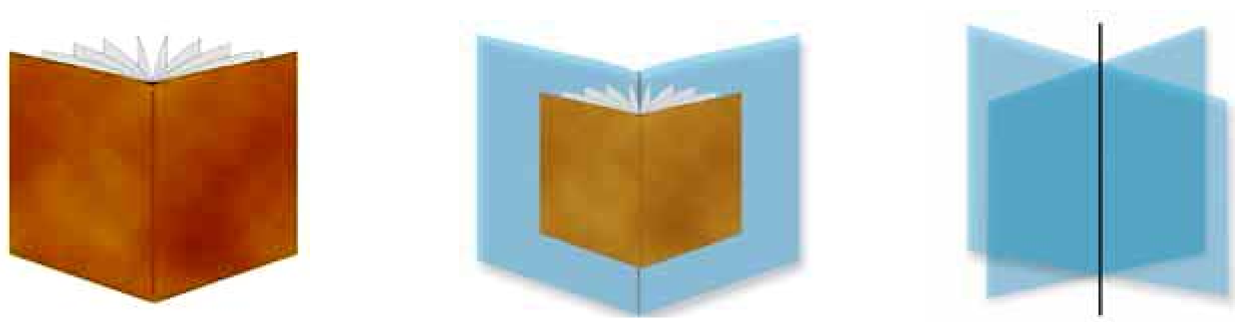


Γι’ αυτό ακριβώς το λόγο, οι φωτογράφοι για μεγαλύτερη σταθερότητα στηρίζουν τις φωτογραφικές μηχανές τους σε τρίποδο και έτσι εξηγείται η τρίτη ρόδα στα ποδήλατα των μικρών παιδιών.

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

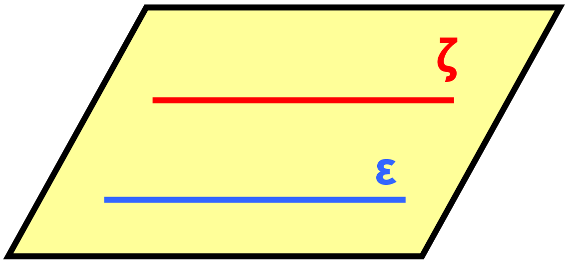
Σε ένα κλειστό βιβλίο οι δύο επιφάνειες που ορίζουν τα εξώφυλλά του, μας δίνουν την αίσθηση ότι όσο και αν τις προεκτείνουμε, δεν τέμνονται ποτέ.
Τα δύο επίπεδα που δημιουργούνται έτσι, λέγονται **παράλληλα**.

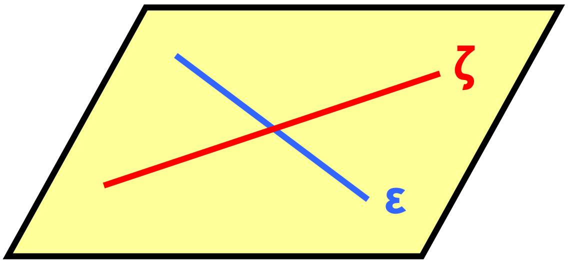
Αν τώρα ανοίξουμε το βιβλίο, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο επίπεδα που τα κοινά τους σημεία ανήκουν σε μια ευθεία. Λέμε, τότε, ότι τα επίπεδα τέμνονται.
Η ευθεία αυτή λέγεται **τομή** των δύο επιπέδων.



Επομένως:

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:
- **Να είναι παράλληλα.**
- **Να τέμνονται κατά μία ευθεία.**



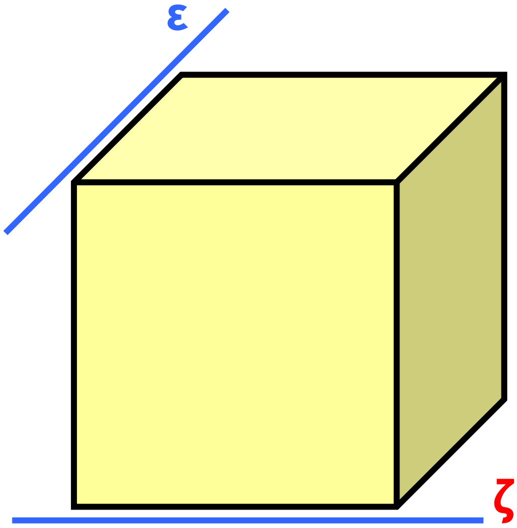


Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο

Γνωρίζουμε ότι δύο διαφορετικές ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούν να είναι παράλληλες ή να τέμνονται.

Όμως, όπως φαίνεται στο διπλανό κύβο, υπάρχουν ευθείες στο χώρο που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμβατες.**



Επομένως:

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ, οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:

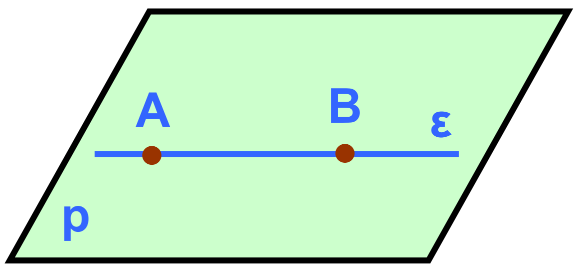
- **Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**
- **Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**

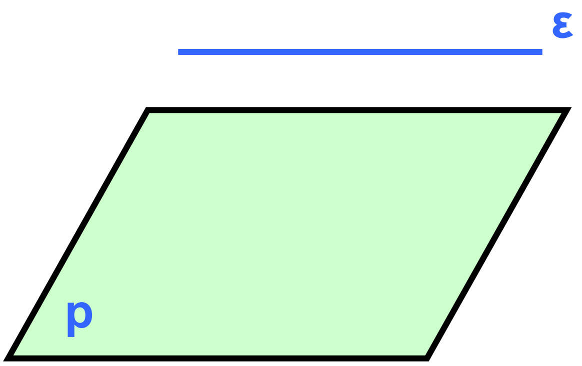
● **Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

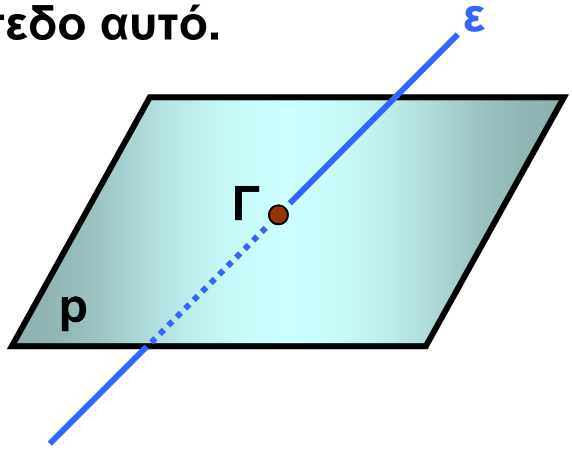
Όπως ξέρουμε, από δύο σημεία ορίζεται μοναδική ευθεία. Όταν τα σημεία αυτά ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει στο επίπεδο αυτό.

Η ευθεία αυτή λέγεται **ευθεία του επιπέδου.**





Αν μια ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε είναι **παράλληλη** στο επίπεδο αυτό.
Είναι, όμως, δυνατό μια ευθεία να τέμνει ένα επίπεδο μόνο σε ένα σημείο.
Το σημείο Γ ονομάζεται **ίχνος της ε** στο επίπεδο **p**.



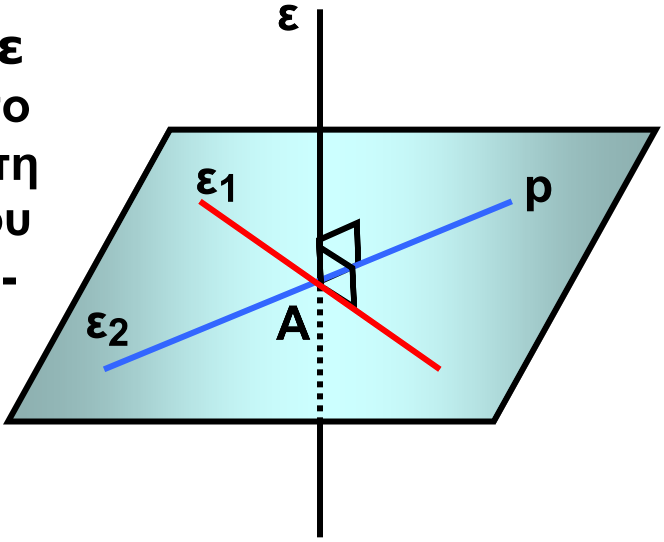
Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

● **Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.**

● **Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.**

● **Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.**

Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

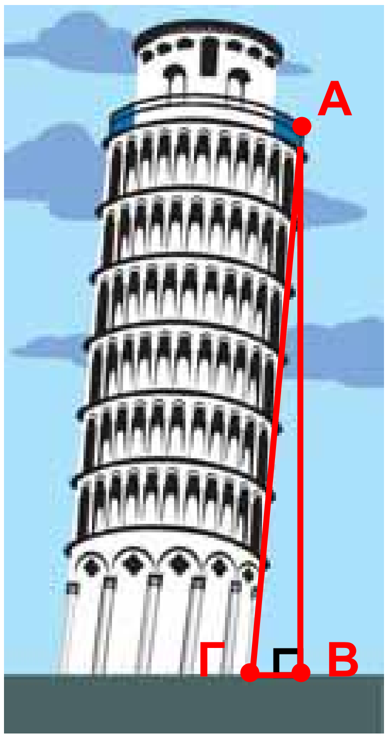


Ας θεωρήσουμε μια ευθεία **ε** που τέμνει το επίπεδο **p** στο σημείο **Α**. Αν η **ε** είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου **p**, που διέρχεται από το σημείο **Α**, τότε θα λέμε ότι η ευθεία **ε** είναι κάθετη στο επίπεδο **p**.

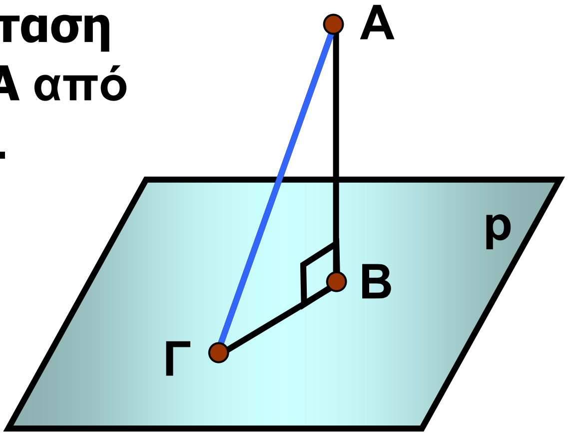
Αποδεικνύεται ότι:

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

Απόσταση σημείου από επίπεδο



Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από την κορυφή **Α** του κεκλιμένου πύργου της Πίζας, θα παρατηρήσουμε ότι διαγράφει τροχιά κάθετη προς το έδαφος. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, που φέρουμε προς το επίπεδο **p** από ένα σημείο **Α** που δεν ανήκει στο επίπεδο, λέγεται **απόσταση** του σημείου **Α** από το επίπεδο **p**.

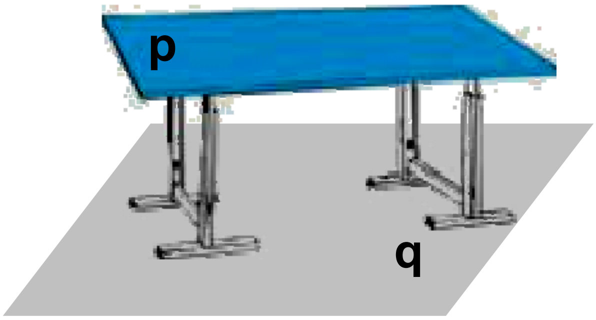


Παρατηρούμε ότι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΓ.**

Απόσταση παράλληλων επιπέδων

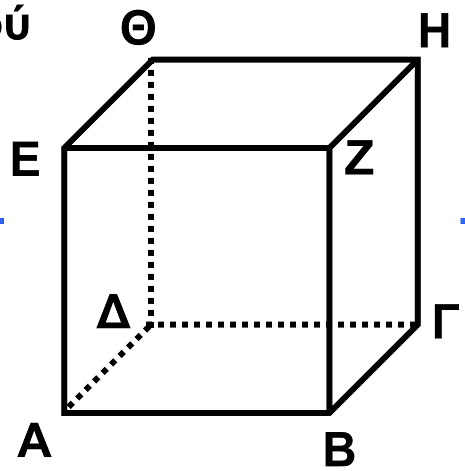
Η **επιφάνεια p** του τραπεζιού ορίζει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο **q** του δαπέδου. Το **ύψος** του τραπεζιού εκφράζει την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου του τραπεζιού p από το επίπεδο του δαπέδου q.

Η απόσταση αυτή ονομάζεται **απόσταση των παράλληλων επιπέδων** p και q.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στον κύβο ΑΒΓΔΕΖΗΘ του διπλανού σχήματος να βρείτε τις ευθείες των ακμών του που είναι ασύμβατες στη ακμή ΑΒ.



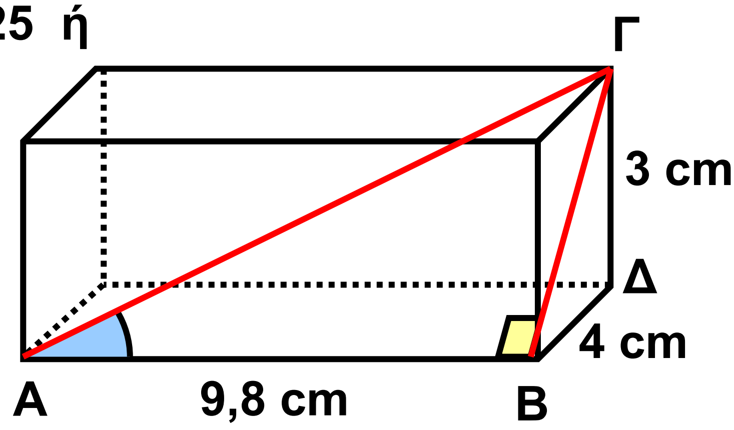
Λύση: Είναι οι ευθείες ΔΘ, ΘΕ, ΗΖ, ΗΓ, γιατί τέμνουν τα επίπεδα στα οποία ανήκει η ΑΒ χωρίς να τέμνουν την ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο της διπλανής σελίδας να υπολογίσετε: α) τη ΒΓ β) τη γωνία $x = B\hat{A}\Gamma$.

Λύση: α) Η ΒΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΔΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = 3^2 + 4^2$ ή $B\Gamma^2 = 25$ ή
$B\Gamma = 5$ (cm).



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη της γωνίας x.

Είναι λοιπόν $εφx = \dfrac{B\Gamma}{AB}$, οπότε $εφx = \dfrac{5}{9{,}8} = 0{,}51$ και

από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι $x = 27^o$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Γράψε στο πλαίσιο Σ ή Λ αντίστοιχα για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση.

1. Μια ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο, όταν δεν περιέχεται στο επίπεδο αυτό και είναι παράλληλη σε μια ευθεία του επιπέδου. ☐

2. Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη σε μια ευθεία του επιπέδου. ☐

3. Μια ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, όταν δύο σημεία της είναι και σημεία του επιπέδου. ☐

4. Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα. ☐

5. Κάθε ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, τέμνει το επίπεδο αυτό. ☐

6. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες ☐

7. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο p, τότε είναι κάθετη σε κάθε άλλο επίπεδο που είναι παράλληλο στο p. ☐

8. Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται:

Α: Δύο επίπεδα

Β: Μόνο ένα επίπεδο

Γ: Άπειρα επίπεδα

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

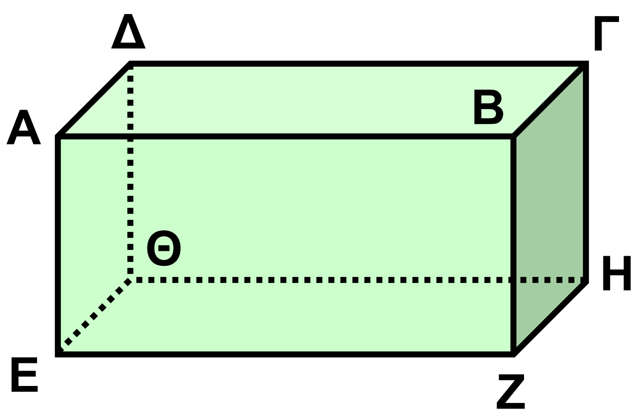
9. Πόσα επίπεδα διέρχονται από μια ευθεία;

Α: Ένα Β: Δύο Γ: Τρία Δ: Άπειρα

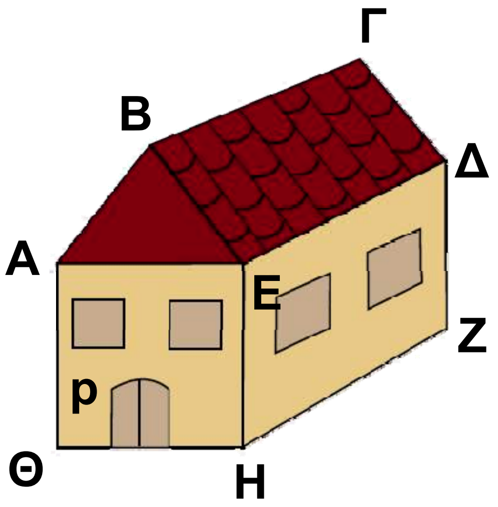
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

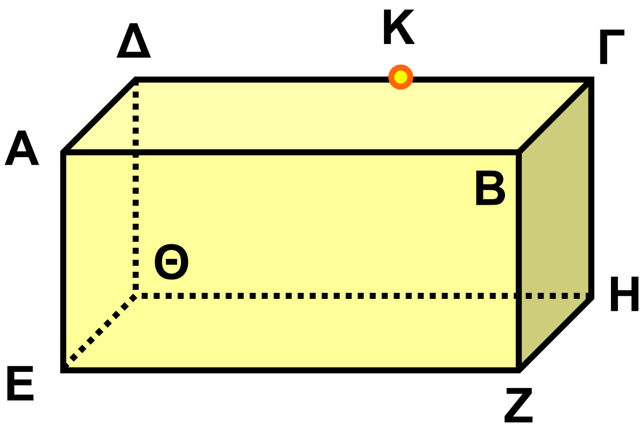
1 Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι:
α) κάθετες στην ΑΕ.
β) παράλληλες στην ΑΒ.
γ) ασύμβατες με την ΔΓ.



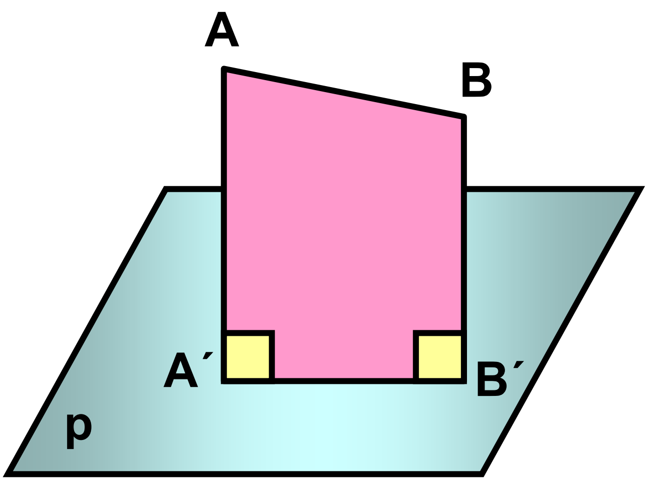
2 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε επίπεδα τα οποία:
α) είναι παράλληλα με το επίπεδο p.
β) τέμνουν το επίπεδο p.
Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την κοινή τους ευθεία.



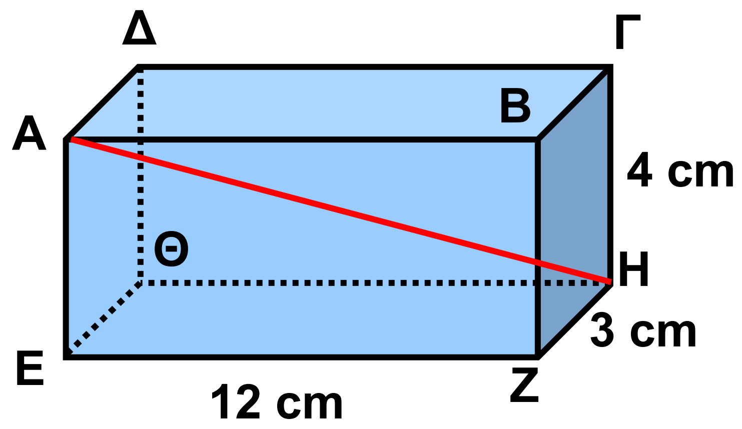
3 Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
α) Να σχεδιάσετε το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία Α, Δ, Ζ.
β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στην κάτω έδρα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



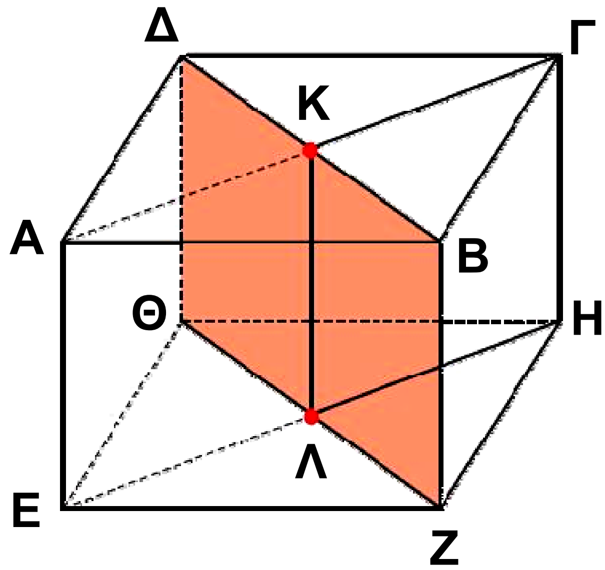
4 Οι αποστάσεις των σημείων Α,Β από το επίπεδο p είναι ΑΑ΄ = 20, ΒΒ΄ = 14. Αν Α΄Β΄ = 8, να υπολογίσετε το ΑΒ.



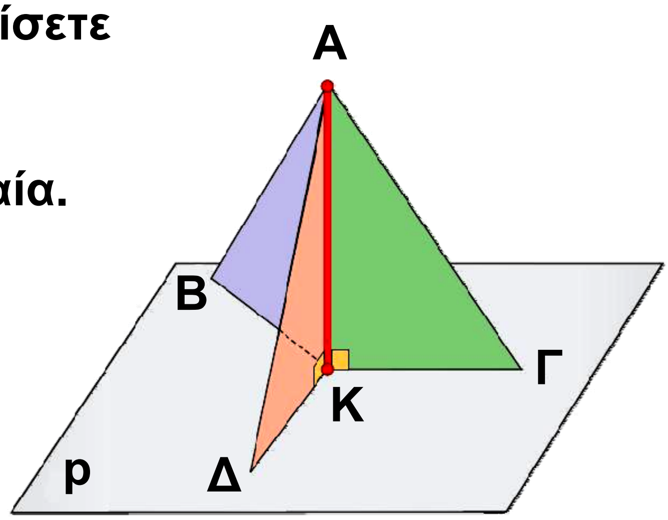
5 Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



6 Ο παρακάτω κύβος έχει ακμή 12 cm.
α) Να εξηγήσετε γιατί η ΗΓ και η ΛΚ είναι κάθετες στην έδρα ΑΒΓΔ του κύβου.
β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο.

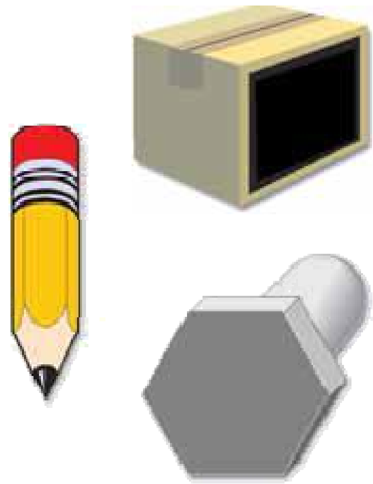


7 Η κεραία ΑΚ του σχήματος, ύψους 12m, είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους. Συγκρατείται με τρία συρματόσχοινα που στερεώνονται στην κορυφή της και στα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν 5 m από το Κ. Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος των συρματόσχοινων που συγκρατούν την κεραία.



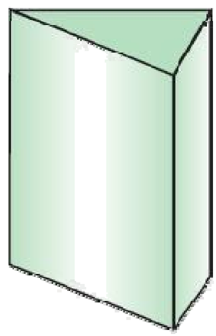
4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

Το ορθό πρίσμα και τα στοιχεία του

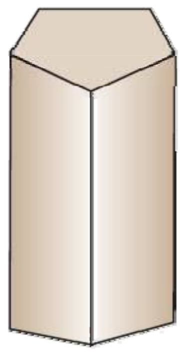


Στο φυσικό κόσμο τα αντικείμενα των διπλανών σχημάτων μάς δίνουν την έννοια του ορθού πρίσματος.

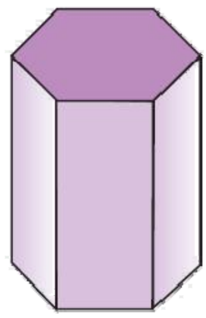
Στη Στερεομετρία τα παρακάτω στερεά σώματα ονομάζονται ορθά πρίσματα. Στη συνέχεια, τα ορθά πρίσματα θα τα λέμε απλά πρίσματα.



τριγωνικό πρίσμα



πενταγωνικό πρίσμα

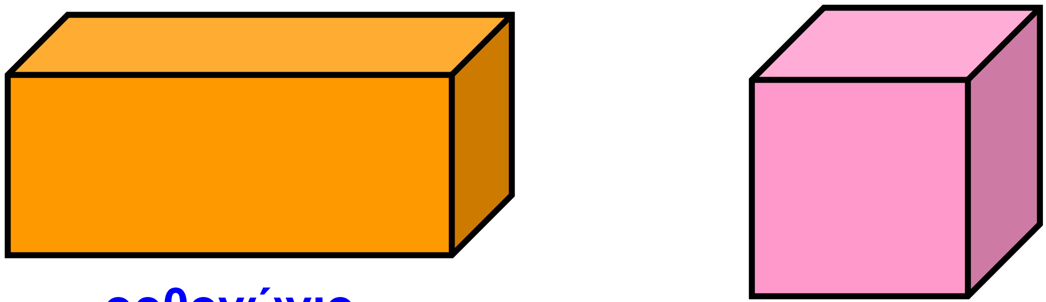


εξαγωνικό πρίσμα

Κάθε πρίσμα έχει:
δύο έδρες παράλληλες, που είναι ίσα πολύγωνα και τις άλλες έδρες του που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται παράπλευρες έδρες.
Οι δύο παράλληλες έδρες του λέγονται βάσεις του πρίσματος.
Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος. Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται ακμές.
Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται ύψος του πρίσματος.

Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευ-
ρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ.

Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

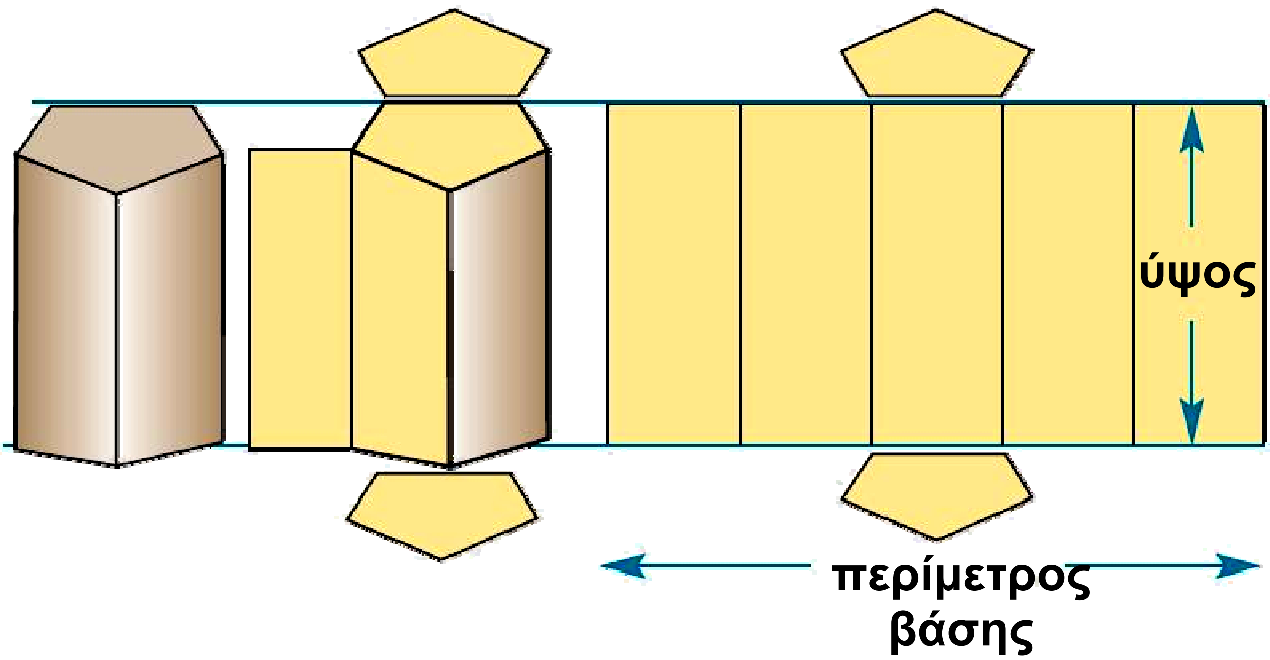


ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

κύβος

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη διαδικασία ανάπτυξης και το τελικό ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος. Ως ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος θεωρούμε το επίπεδο σχήμα που



προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» την παράπλευρη επιφάνειά του και τις βάσεις του. Η παράπλευρη επιφάνεια σχηματίζει ένα ορθογώνιο, που η μία διάστασή του είναι η περίμετρος της βάσης και η άλλη το ύψος του πρίσματος.

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Φυσικά, για να βρούμε το **ολικό εμβαδόν**, πρέπει να προσθέσουμε και τα εμβαδά των δύο βάσεων.

Το ολικό εμβαδόν ενός πρίσματος (Εολ) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας E_{π} και των εμβαδών E_{β} των δύο βάσεων.

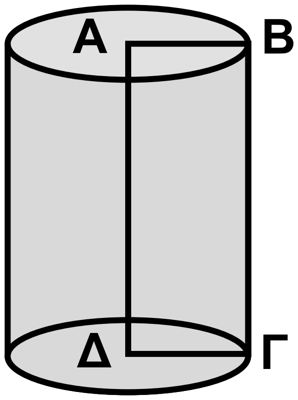
Δηλαδή: $E_{o\lambda} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$

Κύλινδρος

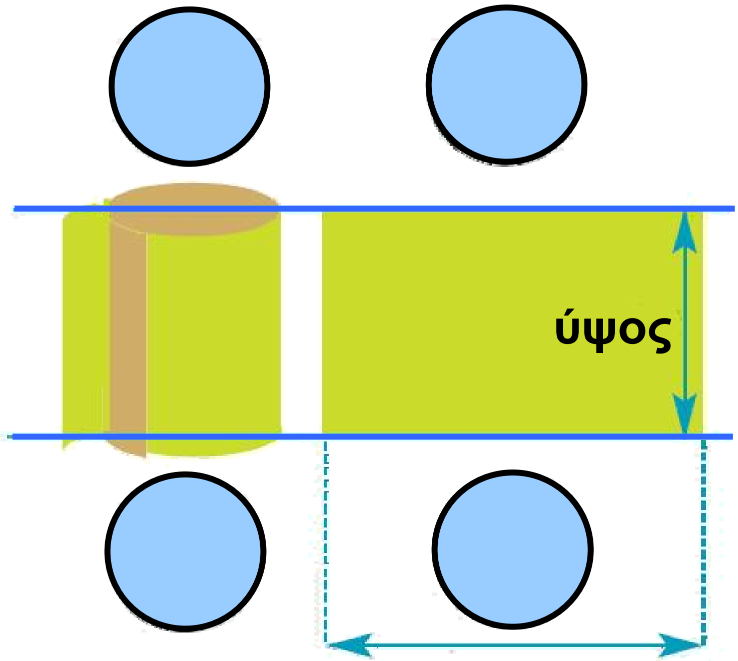
Τα παρακάτω στερεά δίνουν την έννοια του κυλίνδρου.

Ένας κύλινδρος αποτελείται από δυό ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι βάσεις του, και την παράπλευρη επιφάνεια, που, αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.

Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.



Ένας κύλινδρος μπορεί να προκύψει και από την περιστροφή ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω από μια πλευρά του, π.χ. την ΑΔ, και τότε λέγεται κύλινδρος εκ περιστροφής. Η πλευρά ΒΓ λέγεται γενέτειρα του κυλίνδρου και ισούται με το ύψος του.



Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου. Είναι φανερό ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, οπότε ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του κυλίνδρου.

Η περίμετρος της βάσης ισούται με το μήκος του κύκλου, δηλαδή 2πρ.

Το εμβαδόν $Ε_π$ της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με 2πρ) επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή

$$Ε_π = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

$$\text{ή} \quad Ε_π = 2πρ \cdot υ$$

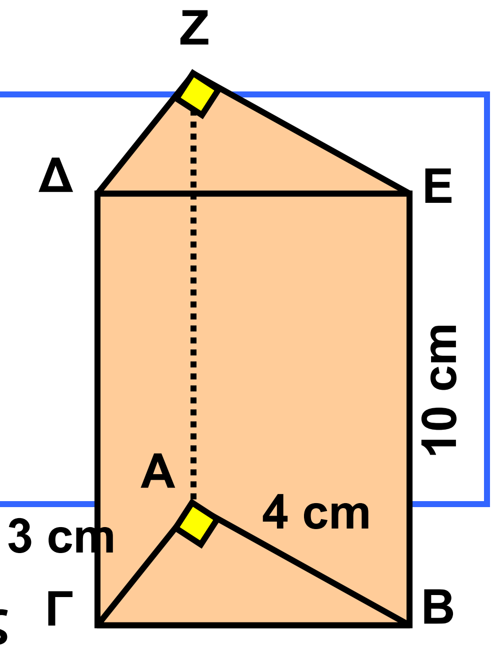
Φυσικά, για να βρούμε το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου, πρέπει στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας να προσθέσουμε τα εμβαδά των δύο βάσεων.

Το ολικό εμβαδόν $Ε_{ολ}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_π$ και τα εμβαδά $Ε_β$ των δύο βάσεων. Δηλαδή:

$$Ε_{ολ} = Ε_π + 2Ε_β$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm^2) χρειάζεται, για να κατασκευαστεί το πρίσμα του διπλανού σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.



Λύση: **Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm. Η υποτείνουσα ΒΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:**

$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm). Επομένως:

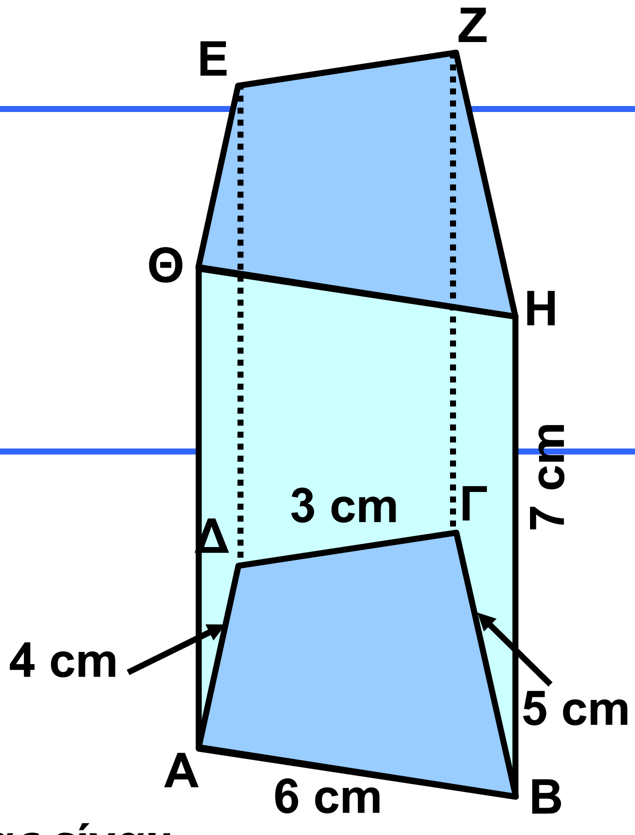
$E_\beta = \frac{1}{2}\ \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6\ (cm^2)$.

E_π = (περίμετρος βάσης) • (ύψος) = 12 • 10 = 120 (cm^2).

$E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 120 + 2 \cdot 6 = 132\ (cm^2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που δίνεται στο διπλανό σχήμα.

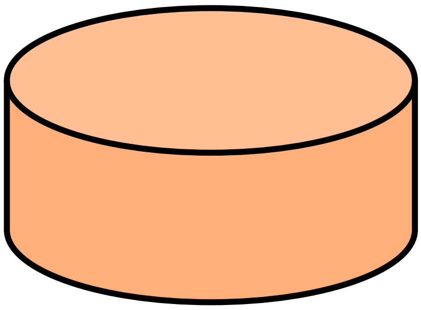


Λύση: Οι βάσεις του πρίσματος είναι τετράπλευρα με περίμετρο:
3 + 4 + 6 + 5 = 18 (cm).
Το ύψος του πρίσματος είναι 7 cm. Άρα, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:
E_π = (περίμετρος βάσης) • (ύψος) = 18 • 7 = 126 (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κόστος δεξαμενής καυσίμων

Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 20 m και ακτίνα βάσης ρ = 30 m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει 5 € το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;



Λύση: Πρέπει να βρούμε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας χρησιμοποιήθηκαν (δηλαδή το ολικό εμβαδόν) και να το πολλαπλασιάσουμε με το κόστος 5 € ανά τετραγωνικό μέτρο.

- Η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν:

  E_π = (περίμετρος βάσης) • (ύψος)

  $= 2\pi\rho \bullet \upsilon = 2 \bullet 3,14 \bullet 30 \bullet 20 = 3768\ (m^2)$.
- Καθεμία από τις βάσεις έχει εμβαδόν:

  $E_\beta = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 30^2 = 2826\ (m^2)$.
- Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι:

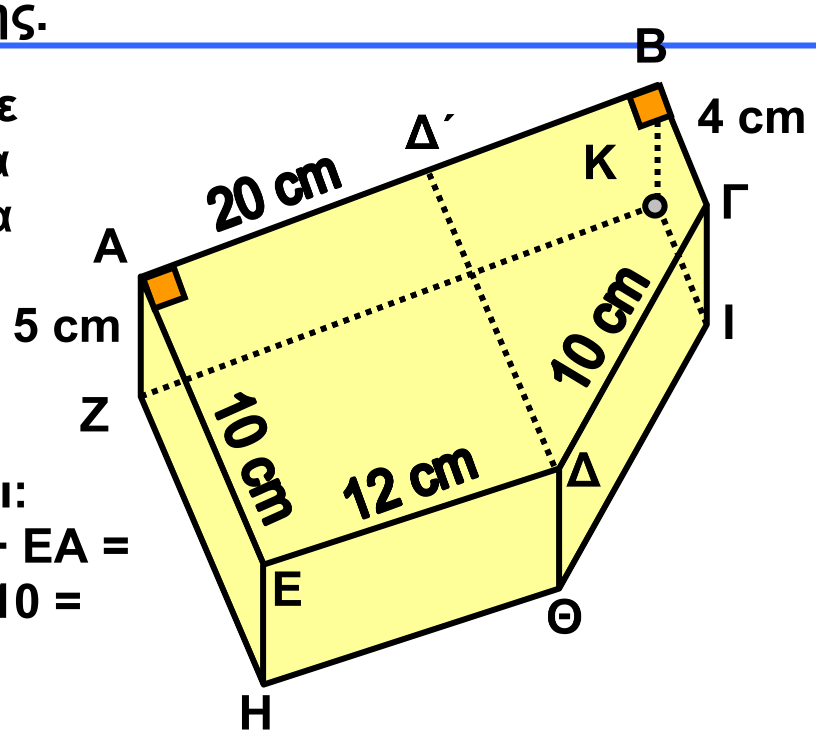
  $E_{o\lambda} = E_\pi + 2 \cdot E_\beta = 3768 + 2 \cdot 2826 = 9420\ (m^2)$.

Επομένως, το κόστος της λαμαρίνας είναι $9420 \bullet 5 = 47100$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Η βάση της μηχανής

Το παρακάτω κλειστό κουτί κατασκευάζεται από ξύλο και χρησιμεύει ως βάση μιας μηχανής. Να βρείτε την επιφάνεια του ξύλου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της βάσης.



Λύση: Παρατηρούμε ότι το κουτί είναι ένα τετραγωνικό πρίσμα με βάσεις τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΙΚ.
Η περίμετρος της κάθε βάσης είναι:
ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ =
= 20 + 4 + 10 + 12 + 10 =
= 56 (cm).

Το ύψος του πρίσματος είναι υ = ΑΖ = 5 (cm).
Επομένως, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

E_π = (περίμετρος βάσης) • (ύψος) = 56 • 5 = 280 (cm^2).

Για να βρούμε το εμβαδόν της βάσης ΑΒΓΔΕ, τη χωρίζουμε σε δύο μέρη: σε ένα ορθογώνιο ΑΕΔΔ΄ και σε ένα τραπέζιο ΒΓΔΔ΄. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΔΔ΄ είναι ίσο με 10 • 12 = 120 (cm^2). Το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΓΔΔ΄ είναι ίσο με:

$$E_{\tau\rho} = \frac{1}{2}(\beta + B) \cdot \upsilon = \frac{1}{2}(4 + 10) \cdot 8 = 56\ (cm^2).$$

Άρα, το εμβαδόν της βάσης είναι:

$$E_\beta = 120 + 56 = 176\ (cm^2).$$

Το ολικό εμβαδόν του πρίσματος είναι:

$$E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 280 + 2 \cdot 176 = 280 + 352 = 632\ (cm^2).$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Ένα πρίσμα με βάση πεντάγωνο έχει:

α) Α: 5 έδρες Β: 6 έδρες Γ: 7 έδρες.

β) Α: 8 κορυφές Β: 10 κορυφές Γ: 12 κορυφές.

γ) Α: 10 ακμές Β: 15 ακμές Γ: 12 ακμές.

2. Δίνεται πρίσμα με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και ύψους 8cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:
Α: 400 cm^2 Β: 320 cm^2 Γ: 800 cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:
Α: 600 cm^2 Β: 520 cm^2 Γ: 800 cm^2.

3. Ένας κύλινδρος έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 8cm.
α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:
Α: 40π cm^2 Β: 60π cm^2 Γ: 80π cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:
Α: 100π cm^2 Β: 110π cm^2 Γ: 130π cm^2.

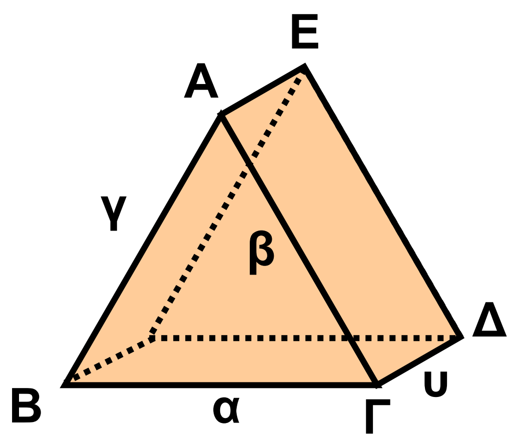
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα της επόμενης σελίδας, όπου φαίνεται η περίμετρος της βάσης, το ύψος και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος.

περίμετρος βάσης	8	7		5	
ύψος υ	5		6		10
Εμβαδόν $Ε_π$		70	24	14	5

2 Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας τριγωνικού πρίσματος του οποίου η βάση είναι τρίγωνο με πλευρές α = 3 dm, β = 5 dm, γ = 6 dm και το ύψος 0,8 cm.

3 Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών της βάσης ενός τριγωνικού πρίσματος, υ το ύψος του και $Ε_π$ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.



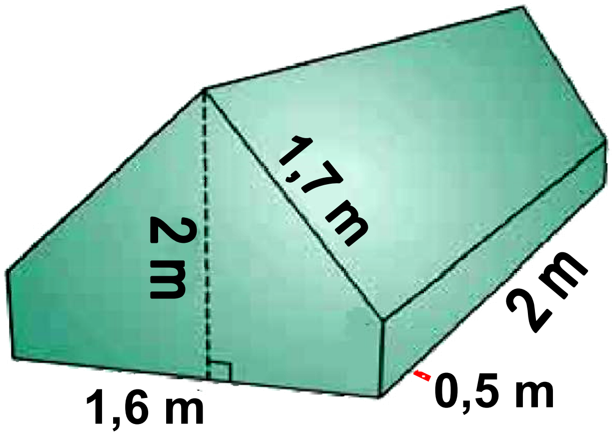
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

α	2	3	2	3	
β	3	5	5		2
γ	4	2		5	2
υ	5		4	8	5
E_{π}		40	80	80	45

4 Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: πλάτος 4 m, μήκος 5 m και ύψος 3 m. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώματος καλύπτει περίπου 9 m^2;

5 Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν πρίσματος με ύψος υ = 20 cm και βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm.

6 Η σκηνή ενός κάμπινγκ είναι κατασκευασμένη από ύφασμα (μαζί με το δάπεδό της) και έχει διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάστηκαν για την κατασκευή της;



7 Να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm.
β) Έχει διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 6 cm.
γ) Έχει περίμετρο βάσης 15,7 cm και ύψος 32 cm.
δ) Έχει εμβαδόν βάσης 50,24 cm^2 και ύψος 2 dm.

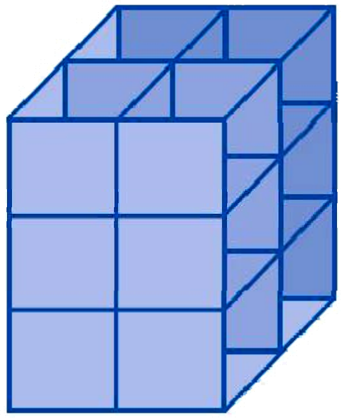
8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που συνδέει την ακτίνα της βάσης και το ύψος ενός κυλίνδρου με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν του.

ακτίνα βάσης (cm)	3	2			1
ύψος κυλίνδρου (cm)	5		1		
εμβαδόν $Ε_π$ (cm^2)		50,24	62,8	125,6	
ολικό εμβαδόν (cm^2)				753,6	62,8

9 Το κυλινδρικό κουτί μιας κονσέρβας έχει ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 3 cm. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 0,5 € το τετραγωνικό μέτρο, ενώ το υλικό της παράπλευρης επιφάνειας κοστίζει 0,3 € το τετραγωνικό μέτρο. Πόσο θα κοστίζει το υλικό όταν πρόκειται να κατασκευάσουμε 1000 κουτιά;

4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

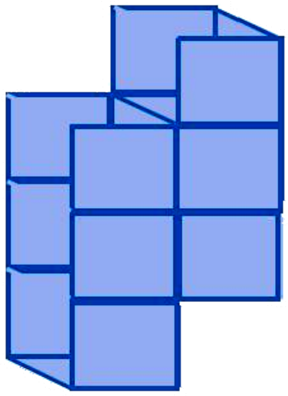
Η έννοια του όγκου



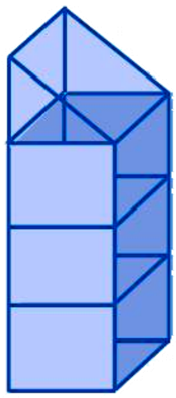
V = 12

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρους του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ, λέγεται **όγκος** του σώματος.

Μονάδες μέτρησης όγκου



V = 6



V = 3,5

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m).
Ο όγκος του ισούται με
1 κυβικό μέτρο (m^3).

Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1 dm.

Αφού 1m = 10 dm, θα ισχύει ότι:
$1\ m^3 = 103\ dm^3 = 1000\ dm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3 = 0,001\ m^3$.

β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1cm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm, οπότε $1\ m^3 = 103\ dm^3 = 1003\ cm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι:

$$1\ cm^3 = \frac{1}{1000}\ dm^3 = \frac{1}{1000000}\ m^3.$$

γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1mm. Ισχύει ότι
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm,
οπότε 1 m^3 = 103 dm^3 = 1003 cm^3= 10003 mm^3.

Αντίστροφα ισχύει ότι:

$$1mm^3 = \frac{1}{1000}\ cm^3 = \frac{1}{1000000}\ dm^3 = \frac{1}{1000000000}\ m^3$$

Στον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 ως λίτρο (ℓ). Τότε, το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (mℓ).

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

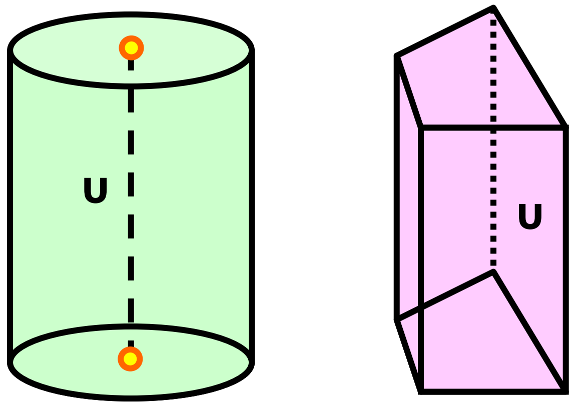
Ας θεωρήσουμε μια σύριγγα γεμάτη χρωματισμένο νερό. Ασκώντας πίεση, το έμβολο διαγράφει το μήκος της σύριγγας έως ότου αδειάσει όλο το νερό.

Είναι φανερό ότι το νερό έχει όγκο ίσο με τον όγκο της κυλινδρικής σύριγγας.

Ο όγκος της σύριγγας διαγράφεται από την κίνηση του εμβαδού του εμβόλου σε όλο το μήκος της.

Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) • (ύψος)

Είναι φανερό ότι
το ίδιο θα ισχύει,
αν στη θέση της κυλιν-
δρικής σύριγγας έχουμε
ένα οποιοδήποτε πρίσμα.



Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:

Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) • (ύψος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) με ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm,

β) με διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 4 cm,

γ) με περίμετρο βάσης 31,4 cm και ύψος 3 cm.

Λύση: α) Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου V του κυλίνδρου και έχουμε:

$V = πρ^2 • υ = π • 3^2 • 5 = 45π = 141{,}3\ (cm^3)$.

β) Αφού η διάμετρος είναι δ = 4 cm, η ακτίνα είναι ρ = 2 cm. Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:

$V = πρ^2 • υ = π • 2^2 • 4 = 16π = 50{,}24\ (cm^3)$.

γ) Πρώτα υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της βάσης:

L = 2πρ ή

31,4 = 2π • ρ ή

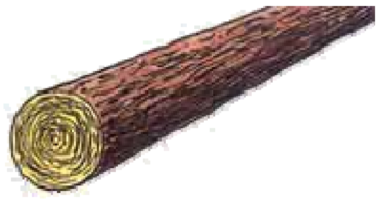
31,4 = 6,28 • ρ ή

ρ = 5 (cm).

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 • υ = π • 5^2 • 3 = 75π = 235,5$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

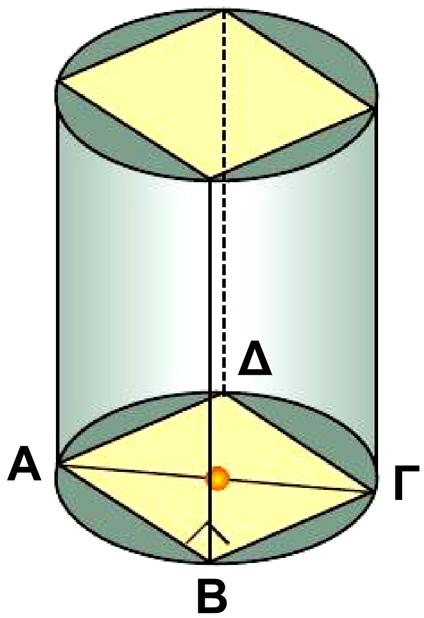
Ο διπλανός κορμός δέντρου θεωρούμενος ως κύλινδρος έχει μήκος 8 m και διάμετρο βάσης 0,6 m. Η τιμή του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € ανά κυβικό μέτρο. Πόσο αξίζει ο κορμός;



Λύση: α) Αφού η διάμετρος του κορμού είναι δ = 0,6 m, τότε η ακτίνα του κύκλου της βάσης του κυλίνδρου είναι ρ = 0,3 (m).
Επομένως, ο όγκος του κυλίνδρου είναι:
$V_K = πρ^2 • υ = 3,14 • (0,3)^2 • 8 = 2,26$ (m^3).
Αφού η αξία του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € το κυβικό μέτρο, η αξία του κορμού είναι:
Α = 2,26 • 100 = 226 €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς α (cm) και είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο με ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης ρ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τη πλευρά α του τετραγώνου.
β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου και τον όγκο του πρίσματος.



Λύση: α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα $ΑΓ = 2 \cdot ρ = 2 \cdot 3 = 6$ (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$α^2 + α^2 = 6^2$ ή $2α^2 = 36$ ή $α^2 = 18$.
Άρα: $α = \sqrt{18} = 4{,}24$ (cm).
β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:
$V_{κυλ} = πρ^2υ = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 10 = 282{,}6$ (cm^2).
Ο όγκος του πρίσματος είναι:
$Vπρ = Eβ \cdot υ = α^2 \cdot υ = 18 \cdot 10 = 180$ (cm^2).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος πρίσματος.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	12	8	
ύψος (cm)	3		6
όγκος (cm^3)		56	30

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος κυλίνδρου.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	22	9	
ύψος (cm)	4		6
όγκος (cm^3)		72	120

3. Δίνονται τέσσερις κύλινδροι που έχουν όλοι ακτίνα βάσης ρ = 4 cm. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	1ος κύλινδρος	2ος κύλινδρος	3ος κύλινδρος	4ος κύλινδρος
ύψος κυλίνδρου υ	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $Ε_π$				
ολικό εμβαδόν $Ε_{ολ}$				
όγκος V				

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm έχει ύψος ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του,
γ) τον όγκο του πρίσματος.

2 Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι τετραπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν 432 cm^2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

3 Ένα τετραγωνικό πρίσμα έχει ολικό εμβαδόν που είναι τριπλάσιο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειάς του.
Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης του είναι τετραπλάσια από το ύψος του πρίσματος.

4 Ένα πρίσμα έχει βάση ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, με ίσες πλευρές ΑΔ = ΒΓ = 5 cm. Το ύψος του τραπεζίου είναι 3 cm και το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm.
Αν ο όγκος του πρίσματος είναι 180 cm^3 και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 220 cm^2, να βρείτε:
α) το εμβαδόν και την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ,
β) τα μήκη των βάσεων ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

5 Λυγίζουμε ένα φύλλο χαρτιού μεγέθους Α4 (21x29cm) και κατασκευάζουμε έναν κύλινδρο ύψους 21cm.
Να βρείτε την ακτίνα βάσης και τον όγκο του κυλίνδρου.

6 Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου ο οποίος έχει:
α) ακτίνα βάσης 10 cm και ύψος 1,2 cm.
β) εμβαδόν βάσης 100 mm^2 και ύψος 0,2 m.

7 Ένα τσιγάρο έχει μήκος 8,5 cm από τα οποία τα 2,5 cm καταλαμβάνει το φίλτρο. Η διάμετρος μιας βάσης του είναι 0,8 cm. Οι αναλύσεις του Υπουργείου Υγείας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι περιέχει 0,5 mg πίσσας

ανά κυβικό εκατοστό καπνού και ότι το τσιγαρόχαρτο περιέχει 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού.
Πόσα mg πίσσας εισπνέει ημερησίως ένας καπνιστής που καπνίζει 15 τσιγάρα την ημέρα;
(Να θεωρήσετε ότι ο καπνιστής πετάει το τσιγάρο έχοντας καπνίσει τα 5 από τα 6 cm του τσιγάρου).

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι έκτιζαν μνημεία με τη μορφή πυραμίδας.

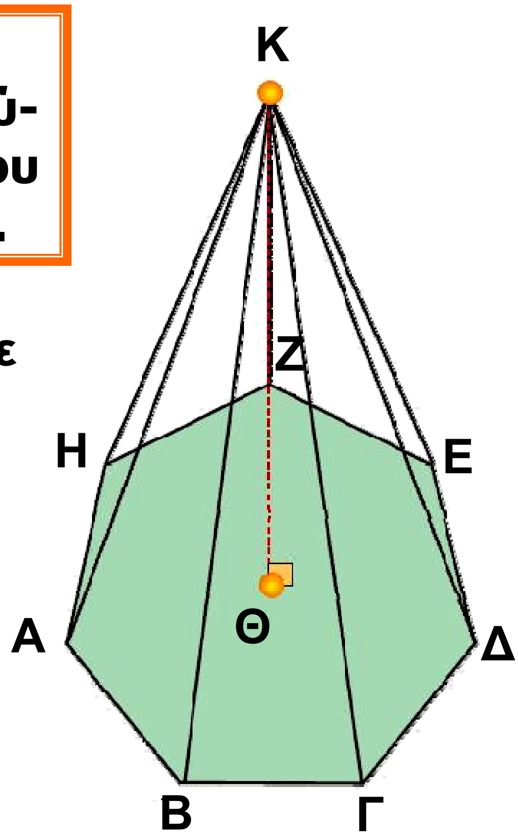
Οι τάφοι των βασιλέων της αρχαίας Αιγύπτου είχαν τη γνωστή σ' εμάς μορφή της πυραμίδας.

Οι Αζτέκοι και οι Ίνκας είχαν χτίσει, επίσης, ναούς στο σχήμα πυραμίδας, αρκετοί από τους οποίους σώζονται μέχρι σήμερα.

Στην είσοδο του μουσείου του Λούβρου, στο Παρίσι, υπάρχει μια σύγχρονη πυραμίδα που σχεδιάστηκε το 1989 από τον αρχιτέκτονα Γιέο Μιγκ Πέι.

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Για παράδειγμα, μια πυραμίδα με μια έδρα το επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



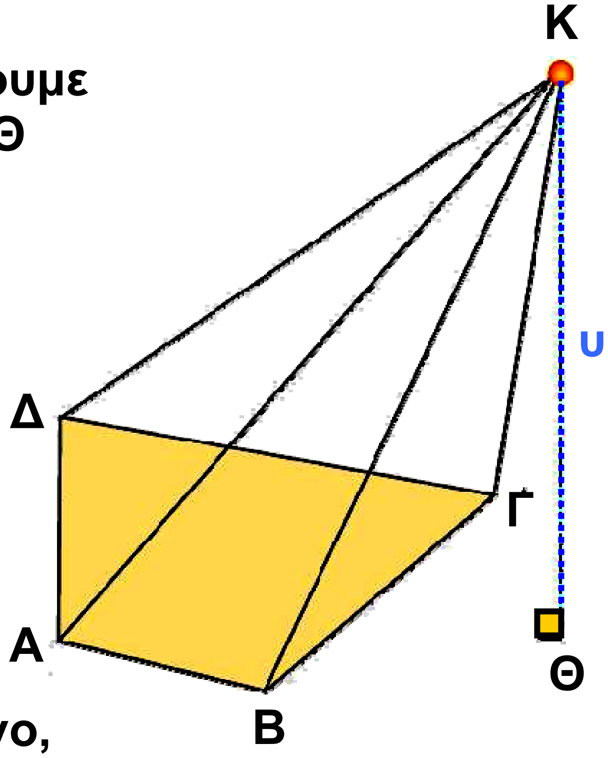
Τα στοιχεία της πυραμίδας

- Το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ λέγεται **βάση** της πυραμίδας.

• Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ: ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΗ και ΚΗΑ λέγονται παράπλευρες έδρες της πυραμίδας.

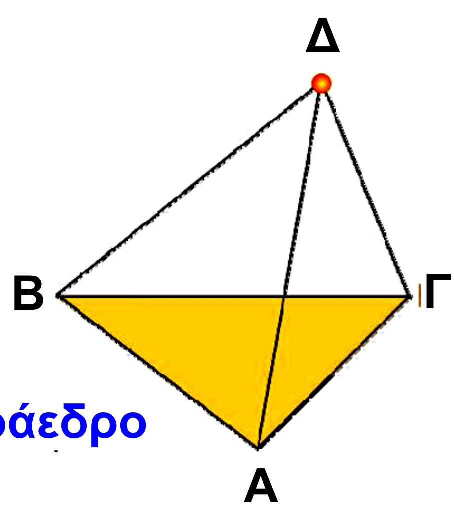
• Το κοινό σημείο Κ των παράπλευρων εδρών λέγεται κορυφή της πυραμίδας.

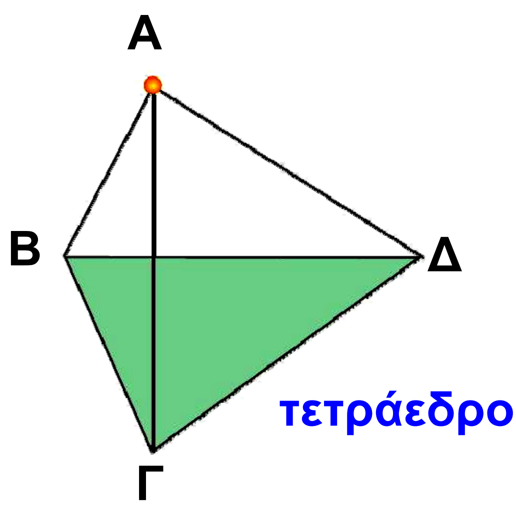
• Αν από την κορυφή Κ φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΚΘ προς τη βάση, τότε το ΚΘ λέγεται ύψος της πυραμίδας. Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας.



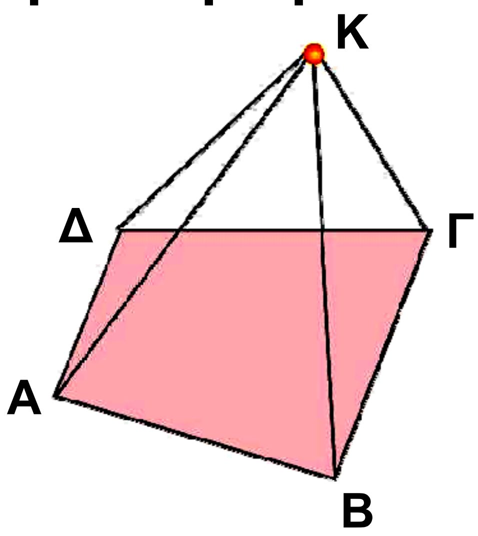
• Μια πυραμίδα που έχει ως βάση ένα τρίγωνο, λέγεται **τριγωνική πυραμίδα.**

Επειδή όμως η τριγωνική πυραμίδα έχει τέσσερις τριγωνικές έδρες και οποιαδήποτε έδρα της μπορεί να θεωρηθεί ως βάση, τη λέμε και **τετράεδρο**.

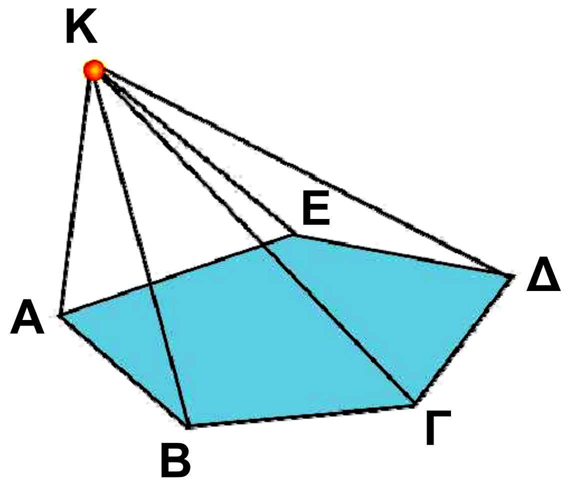




● Μια πυραμίδα που έχει τετράπλευρο λέγεται **τετραπλευρική**.



τετραπλευρική πυραμίδα

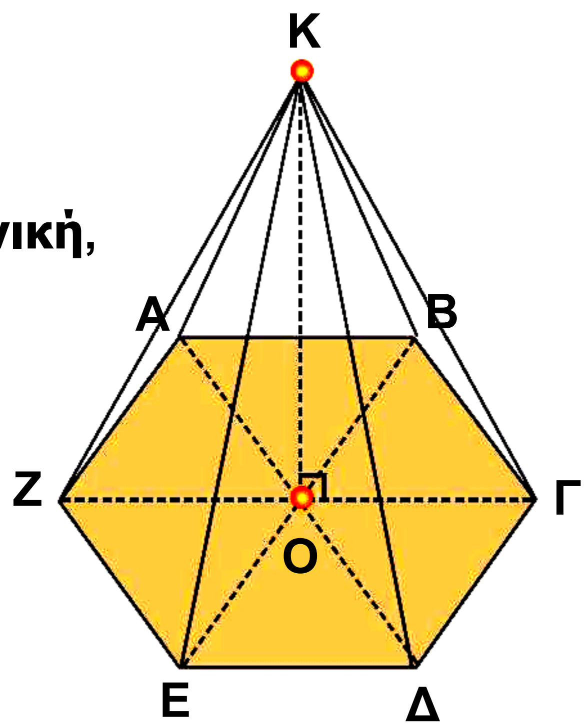


πενταγωνική πυραμίδα

● Μια πυραμίδα που έχει βάση πεντάγωνο λέγεται **πενταγωνική** κ.ο.κ

Κανονική πυραμίδα

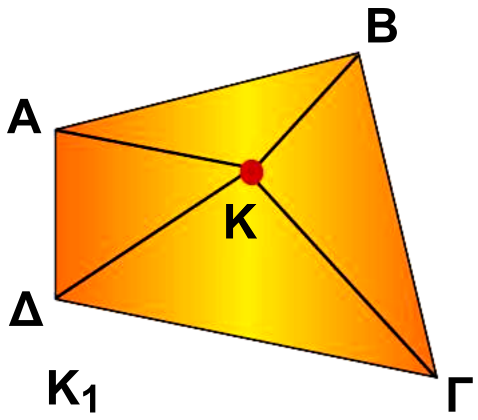
● Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



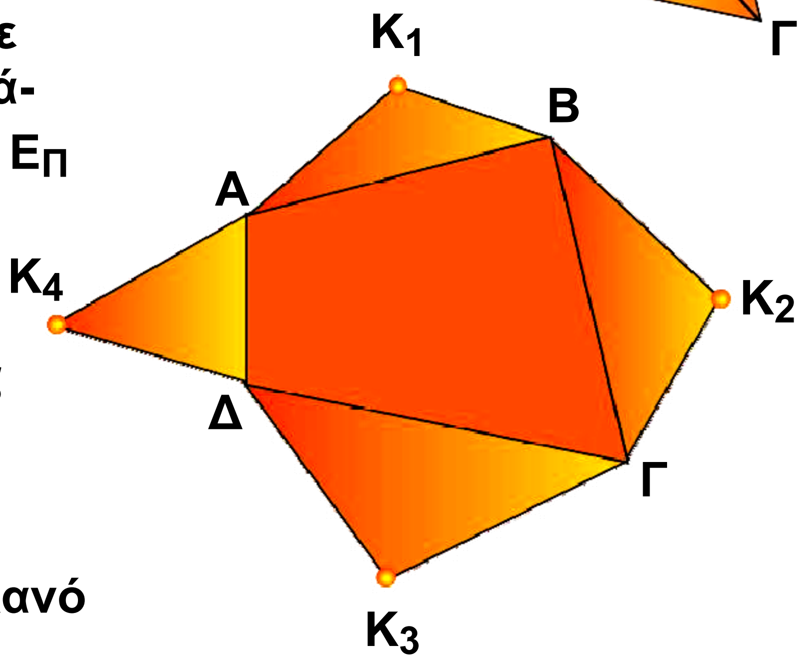
● Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα (ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΑ). Αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες μίας πυραμίδας είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

Εμβαδόν επιφάνειας πυραμίδας

Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την επιφάνεια της βάσης της.



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_Π$ μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά. Επομένως, στο διπλανό σχήμα έχουμε:



$Ε_Π = (Κ_1ΑΒ) + (Κ_2ΒΓ) + (Κ_3ΓΔ) + (Κ_4ΔΑ)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $Ε_{ολ}$ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης $Ε_β$.

$$\boxed{Ε_{ολ} = Ε_Π + Ε_β}$$

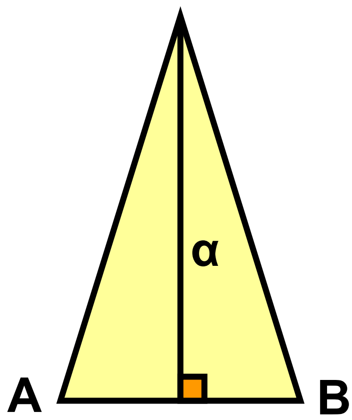
Στο προηγούμενο σχήμα έχουμε ότι:

$Ε_{ολ} = Ε_Π + Ε_β =$

$= (Κ_1ΑΒ) + (Κ_2ΒΓ) + (Κ_3ΓΔ) + (Κ_4ΔΑ) + (ΑΒΓΔ)$.

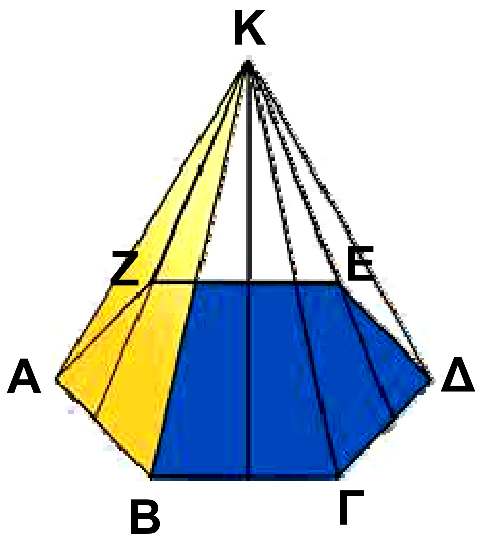
Εμβαδόν επιφάνειας κανονικής πυραμίδας

Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται αποστημα της κανονικής πυραμίδας.



Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας:

$$E_{\Pi} = (KAB) + (KB\Gamma) + (K\Gamma\Delta) + (K\Delta E) + (KEZ) + (KZA) =$$
$$= 6(KAB).$$



Άρα: $E_{\Pi} = 6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \alpha =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot AB) \cdot \alpha.$$

Όμως, η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου ισούται με 6 • ΑΒ. Τελικά, καταλήγουμε ότι:

$E_{\Pi} = \dfrac{1}{2}$ **(περίμετρος εξαγώνου) • απόστημα.**

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τελικά για κάθε κανονική πυραμίδα:

$E_{\Pi} = \dfrac{1}{2}$ **(περίμετρος εξαγώνου) • απόστημα.**

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας, αρκεί να προσθέσουμε

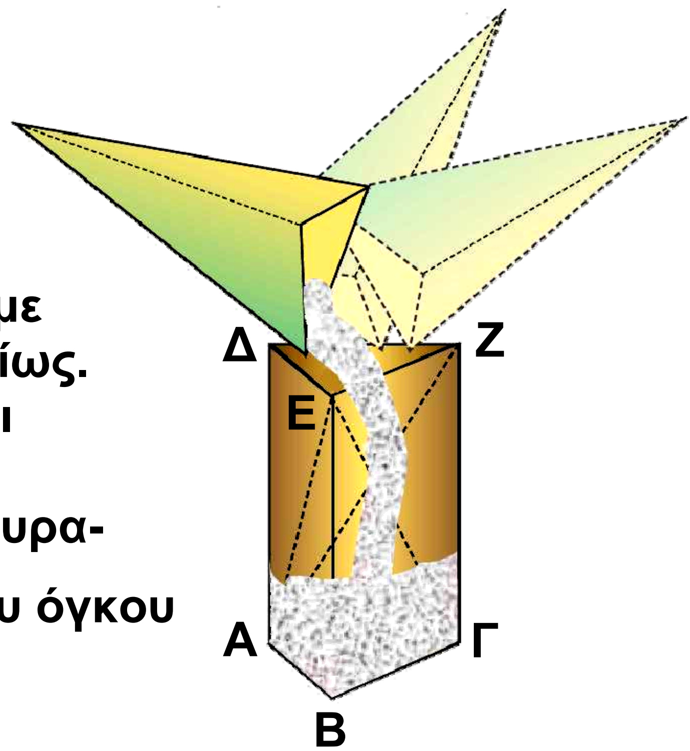
στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_π$ και το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου, που αποτελεί τη βάση της κανονικής πυραμίδας.

Όγκος πυραμίδας

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα, έτσι ώστε να έχουν βάσεις ίσα τρίγωνα και ίσα ύψη.

Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με αλεύρι την πυραμίδα και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως. Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικότερα.

Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του πρίσματος.



Ο όγκος V της πυραμίδας ισούται με:

$$V = \frac{1}{3} \text{(Εμβαδόν βάσης)} \cdot \text{(ύψος)}$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει για τον όγκο μιας πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

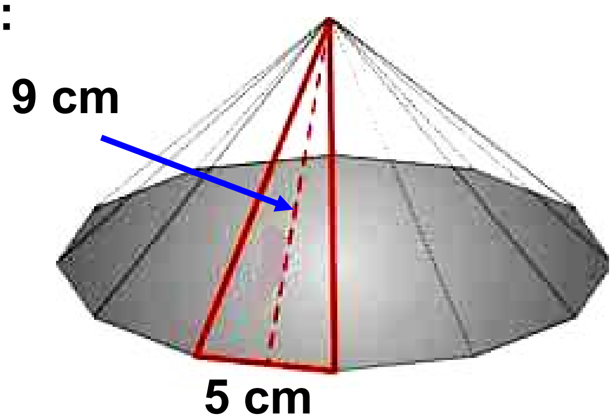
Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση κανονικό δωδεκάγωνο με πλευρά 5 cm. Αν το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 9 cm, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

Λύση: Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2}\,(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα}).$$

Η περίμετρος της βάσης είναι:
$12 \cdot 5 = 60$ (cm) και
το απόστημα 9 cm.
Άρα:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 9 = 270\ (\text{cm}^2).$$



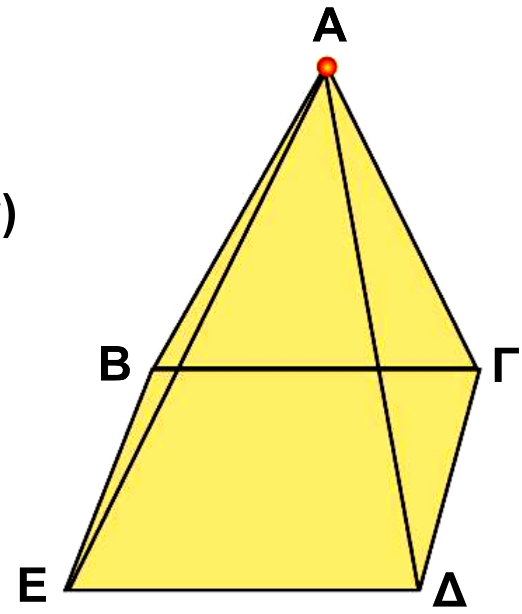
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8 cm και ύψος 12 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση: Ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$V = \frac{1}{3}\,(\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

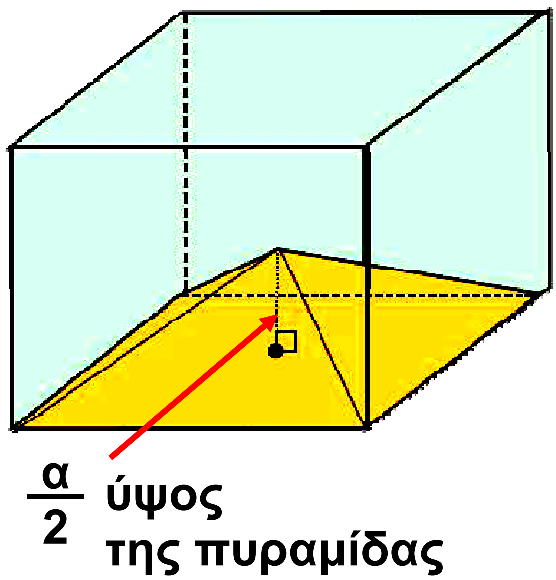
Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι:
$E_{\beta} = 8^2 = 64\ (\text{cm}^2)$.



Επομένως, $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256\ (cm^3)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Από έναν κύβο που έχει ακμή α = 10 cm, αφαιρούμε μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει.



Λύση: Ο όγκος V του στερεού που απομένει, θα βρεθεί, αν από τον όγκο V_K του κύβου αφαιρέσουμε τον όγκο $V_Π$, της πυραμίδας. Έχουμε ότι:

$V_K = α^3 = 10^3 = 1000\ (cm^3)$

$$V_Π = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot α^2 \cdot \frac{α}{2} = \frac{1}{6} \cdot α^3 =$$

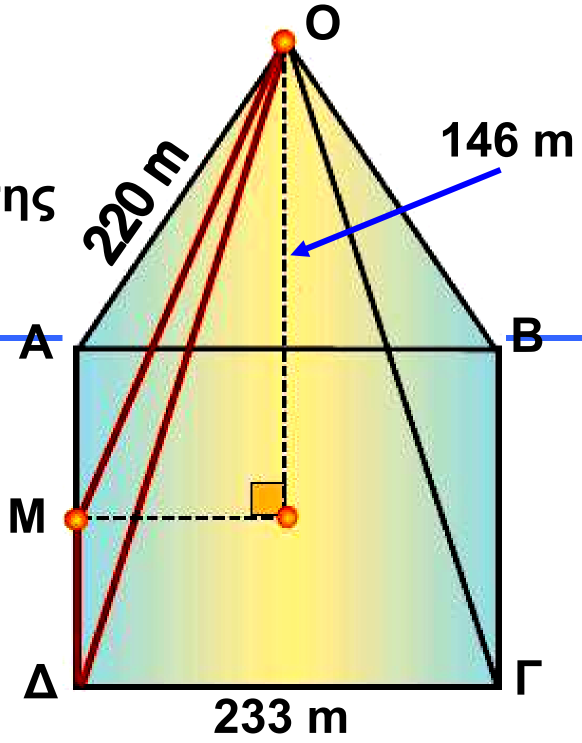
$$= \frac{1000}{6} = 166{,}67\ (cm^3).$$

Άρα: $V = V_K - V_Π = 1000 - 166{,}67 = 833{,}33\ (cm^3)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.
β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



Λύση:

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$E_\Pi = \frac{1}{2}\,(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα}).$$

Για να υπολογίσουμε το απόστημα ΟΜ της πυραμίδας, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΜΔ:

$OM^2 = O\Delta^2 - \Delta M^2$, δηλαδή

$OM^2 = 220^2 - 116{,}5^2 = 34827{,}75$.

Οπότε: ΟΜ = 186,62 m.

$$\text{Άρα: } E_\Pi = \frac{1}{2}\,(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 233) \cdot 186{,}62 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 932 \cdot 186{,}62 = 86964{,}92\ (m^2).$$

β) Ο όγκος είναι: $V = \frac{1}{3}\,(\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

με εμβαδόν βάσης:

$E_\beta = 233^2 = 54589$ (m^2).

Επομένως: $V = \frac{1}{3} \cdot 54589 \cdot 146 = 2642064{,}6$ (m^3).

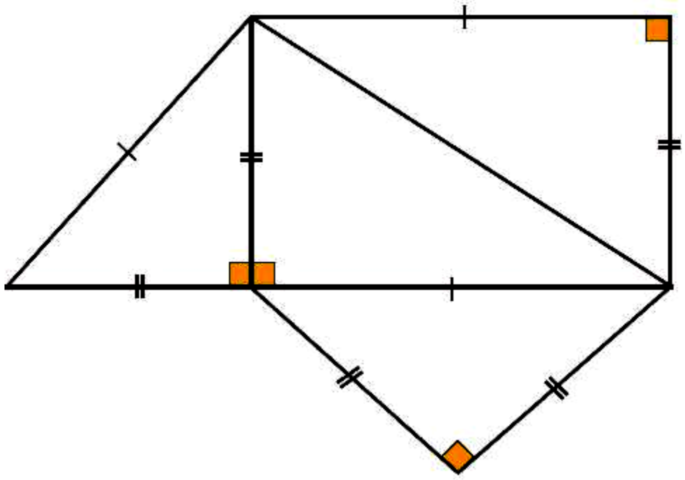
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Γράψε στο πλαίσιο Σ ή Λ αντίστοιχα για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση.

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών. ☐

2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο. ☐

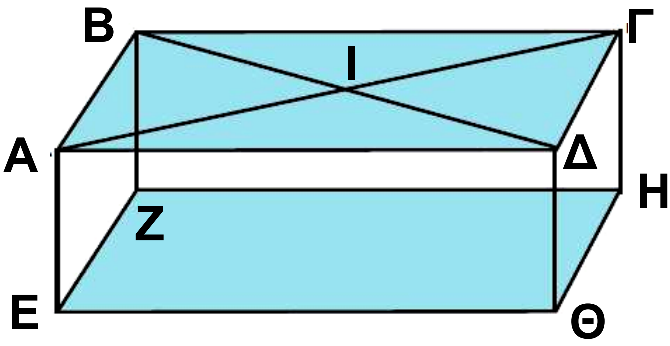
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ανάπτυγμα πυραμίδας. ☐



4. Ο αριθμός των εδρών μιας πυραμίδας είναι πάντα άρτιος αριθμός. ☐

5. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια. ☐

6. Στο παρακάτω σχήμα, οι πυραμίδες ΙΕΖΗΘ και ΗΑΒΖΕ έχουν τον ίδιο όγκο. ☐



7. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι:

Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

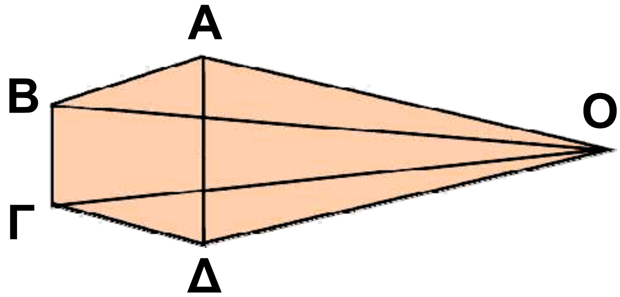
8. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα:

Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή

Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Η πυραμίδα του διπλανού σχήματος έχει βάση:



Α: ΟΓΔ Β: ΟΒΓ Γ: ΑΒΓΔ Δ: ΟΑΒ

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά στα στοιχεία μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

ύψος (cm)	8		6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	
απόστημα (cm)	10		8
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (cm^2)			169,32
όγκος (cm^3)		256	

2 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 12 cm και ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3 Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 9 cm και απόστημα 12 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

4 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm και το ύψος της παράπλευρης έδρας της είναι 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν:
α) της παράπλευρης επιφάνειας,
β) της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

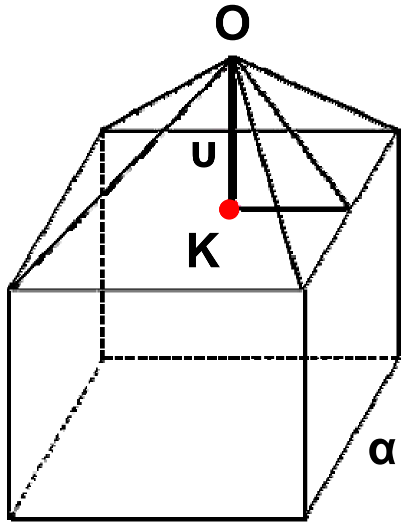
5 Μια τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 700 cm^3 και ύψος 17 cm. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης της.

6 Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα 10 cm και πλευρά βάσης 16 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και τον όγκο της.

7 Ένα τετράεδρο έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

8 Ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι εννεαπλάσιος από τον όγκο μίας άλλης κανονικής πυραμίδας με την οποία έχει το ίδιο ύψος. Να βρείτε το λόγο των πλευρών των βάσεών τους.

9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύβος πλευράς α = 10 cm και μια πυραμίδα με βάση μία έδρα του κύβου και ύψος υ = 6 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



10 Μια κανονική πυραμίδα με βάση εξάγωνο έχει ύψος 8 cm και παράπλευρη ακμή 10 cm. Να υπολογίσετε:

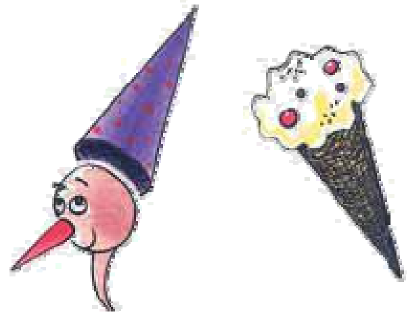
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας,

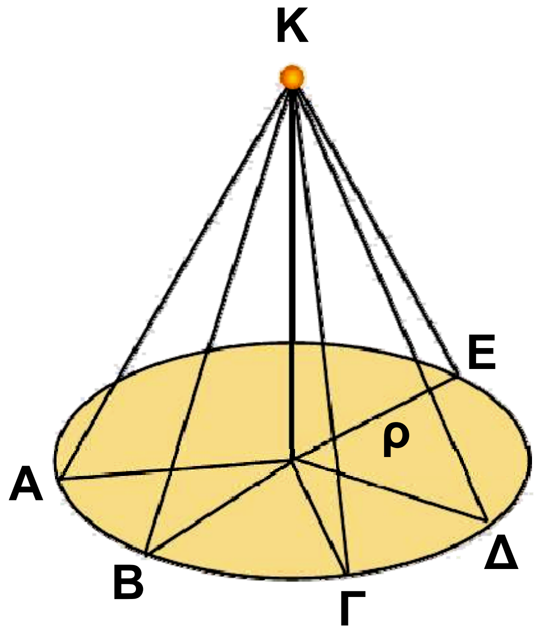
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας,

γ) τον όγκο της πυραμίδας.

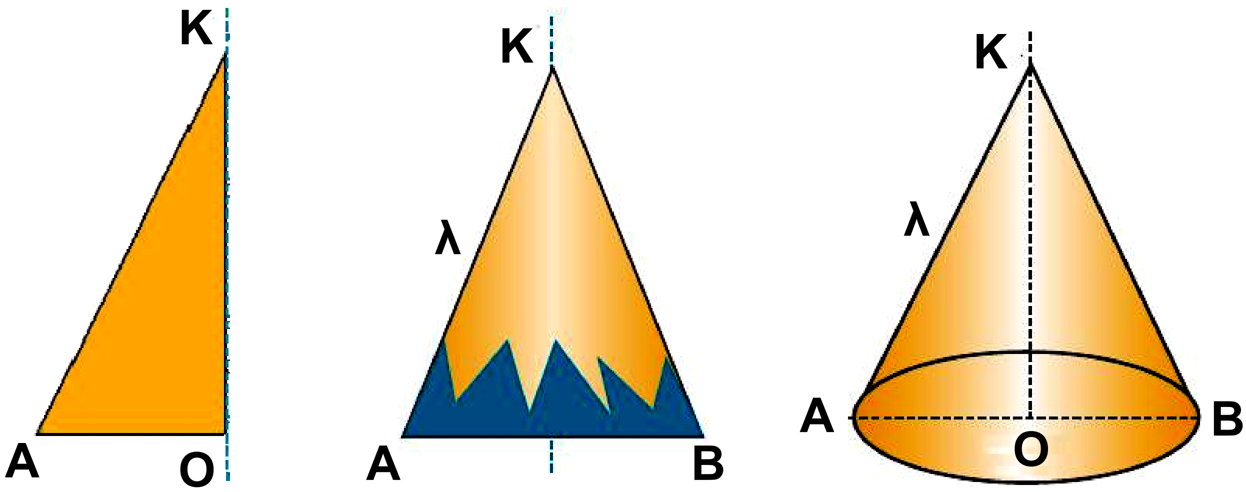
4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

Στην καθημερινή μας ζωή έχουμε συναντήσει συχνά την εικόνα ενός κώνου. Πώς μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε προσεγγιστικά ένα κώνο;





Παίρνουμε ένα κυκλικό στεφάνι ακτίνας ρ. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε από χαρτόνι ίσα ορθογώνια τρίγωνα με μια κάθετη πλευρά ίση με την ακτίνα ρ του στεφανιού. Κολλάμε γύρω από ένα ξυλάκι όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που κόψαμε, έτσι ώστε να έχουν την ίδια κορυφή Κ και οι βάσεις τους να «πατάνε» στο στεφάνι. Αν «ντύσουμε» με ύφασμα ή χαρτί το σχήμα που κατασκευάσαμε, τότε εμφανίζεται ένας κώνος.

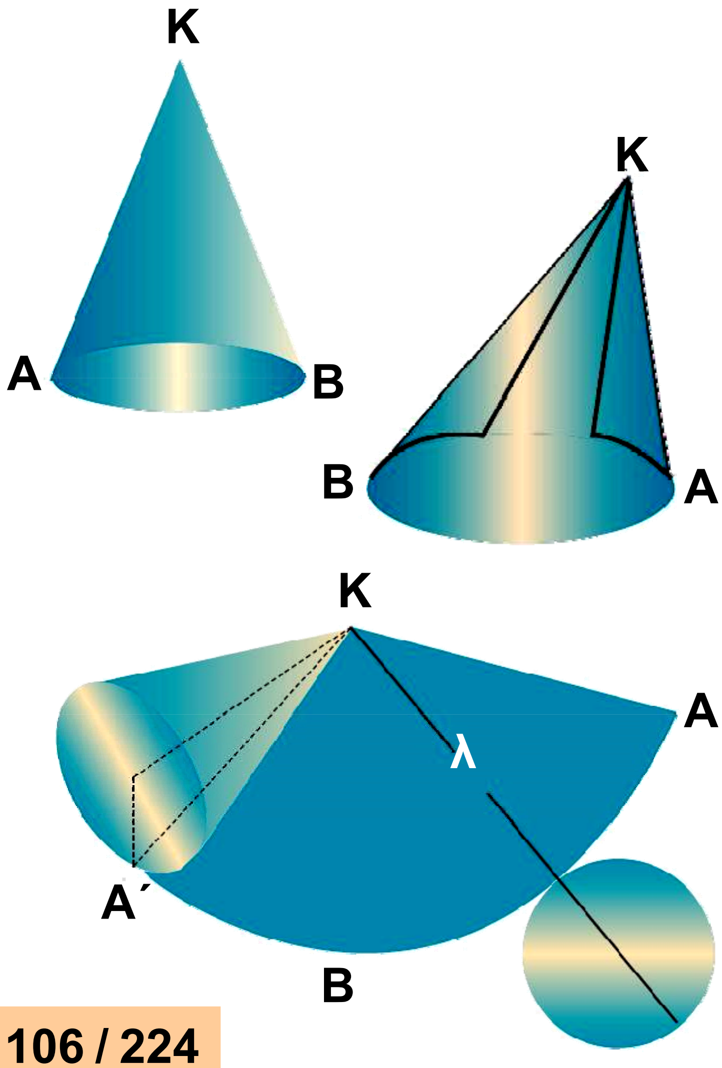


Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ΚΟΑ γύρω από μία κάθετη πλευρά του ΚΟ.

Η βάση του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου ΚΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται **ακτίνα του κώνου**.

Η κάθετη πλευρά ΚΟ γύρω από την οποία περιστρέψαμε το ορθογώνιο τρίγωνο, λέγεται **ύψος** του κώνου. Η υποτείνουσα ΚΑ του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και το μήκος της συμβολίζεται με λ.

Η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή τής γενέτειρας ΚΑ είναι η **παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου.



Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_{Π} του κώνου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ανάπτυγμά της προκύπτει «ξετυλίγοντας» τον κώνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ισούται με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ακτίνας λ με μήκος τόξου $\overset{\frown}{AA'} = 2\pi\rho$.

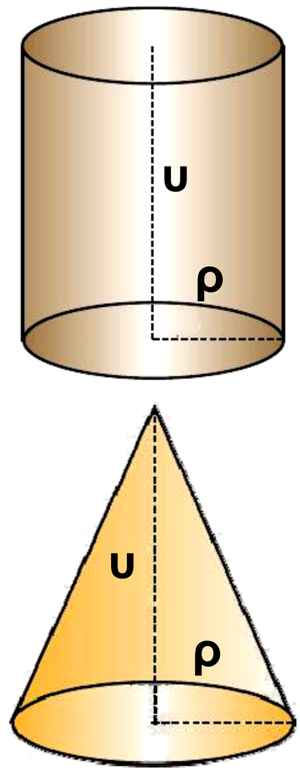
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα λ του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου.

Οπότε: $E_\Pi = \frac{1}{2} \cdot (2\pi\rho) \cdot \lambda$ ή $\boxed{E_\Pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda}$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου, αρκεί στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_Π να προσθέσουμε και το εμβαδόν της βάσης του: $E_B = \pi\rho^2$.

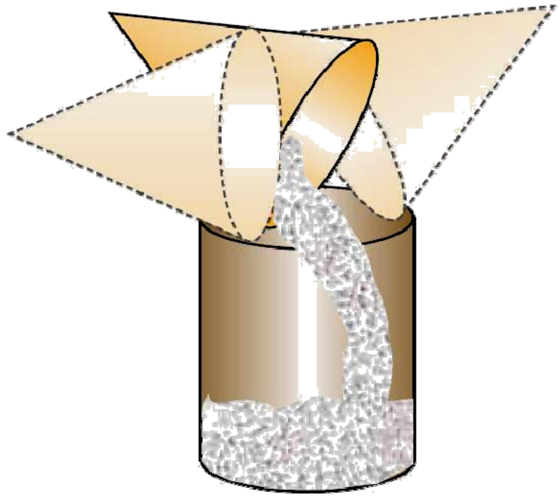
Οπότε: $\boxed{E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2}$

Όγκος κώνου



Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα κώνο και ένα κύλινδρο, έτσι ώστε να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $\pi\rho^2 \upsilon$.
Αν γεμίσουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τον κώνο και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στον κύλινδρο,

θα δούμε ότι ο κύλινδρος γεμίζει τελείως.



Επομένως, ο όγκος του κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου.

Δηλαδή:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi \rho^2 \upsilon}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο ενός κώνου με γενέτειρα λ = 13 cm και ύψος 12 cm.

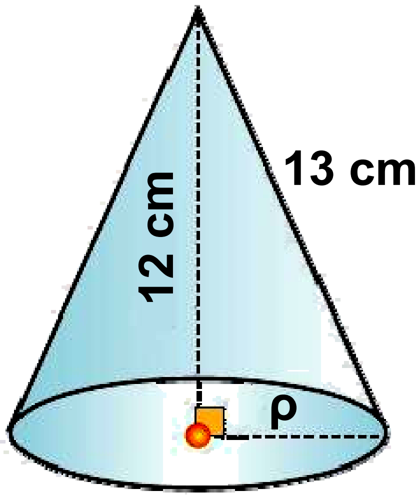
Λύση: Έχουμε ότι:

$\rho^2 = \lambda^2 - \upsilon^2 = 13^2 - 12^2 = 25$

άρα ρ = 5 (cm) και

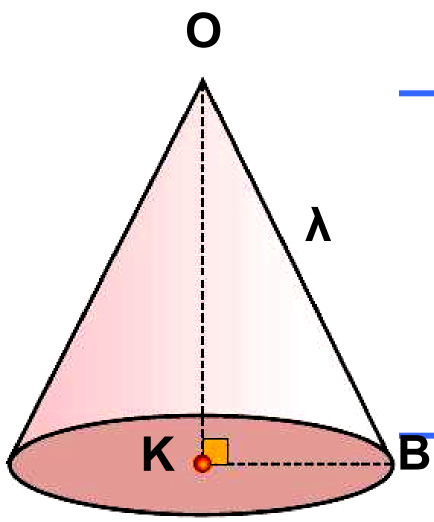
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12 = 314\ (cm^3)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η διάμετρος της βάσης ενός κώνου είναι 12 cm και το ύψος του 8 cm.
Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας,
β) τον όγκο του



Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι $E_Π = π \cdot ρ \cdot λ$.

Για να βρούμε το μήκος της γενέτειρας λ, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ:

$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, άρα $λ = OB = 10$ cm και

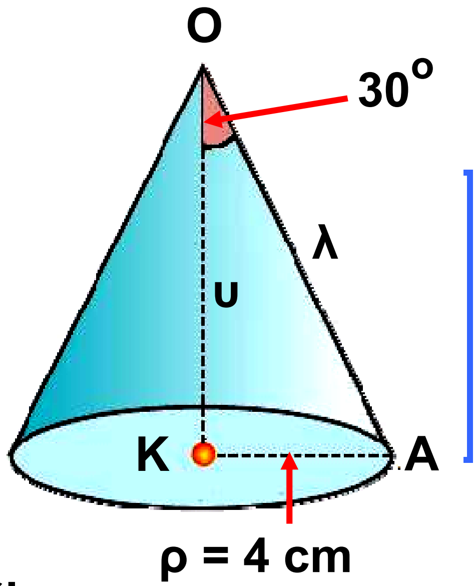
$E_Π = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 10 = 188{,}4$ (cm^2).

β) Έχουμε ότι: $V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 62 \cdot 8 =$

$= 301{,}44$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στον κώνο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας,
β) τον όγκο του κώνου.



Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε:

$ημ30^o = \frac{ρ}{λ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{4}{λ}$ ή $λ = 8$ (cm) και

$συν30^o = \frac{υ}{λ}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{υ}{8}$ ή $2υ = 8\sqrt{3}$(cm) ή

$υ = 4\sqrt{3} = 6{,}93$(cm).

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:

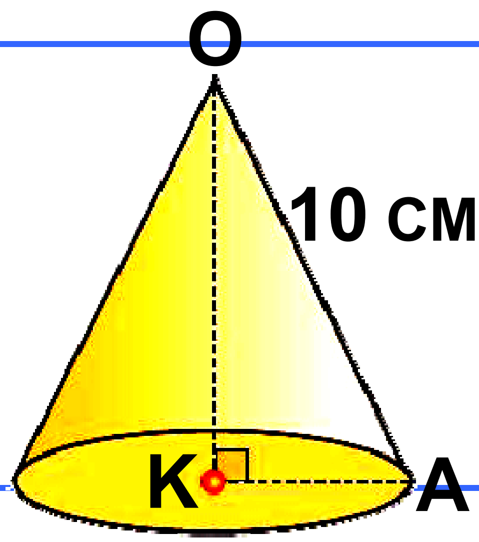
$E_{ολ} = E_Π + E_β = πρλ + πρ^2 = π \cdot 4 \cdot 8 + π \cdot 4^2 = 48π =$
$= 48 \cdot 3{,}14 = 150{,}72$ (cm^2).

β) Ο όγκος του κώνου είναι: $V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ =$

$= \frac{1}{3} \cdot π \cdot 4^2 \cdot 6{,}93 = 116{,}05$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας κώνος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 251,2 cm^2 και γενέτειρα με μήκος 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) την ακτίνα της βάσης του,
β) το ύψος του,
γ) τον όγκο του.



Λύση: α) Έχουμε ότι $E_\Pi = \pi\rho\lambda$ ή

$$\rho = \frac{E_\Pi}{\pi \bullet \lambda} \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{251,2}{3,14 \bullet 10} = 8, \text{ άρα } \rho = 8 \text{ (cm).}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε

$OK^2 = OA^2 - AK^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, άρα $\upsilon = OK = 6$ (cm).

γ) Ο όγκος του κώνου είναι ίσος με:

$$V = \frac{1}{3} \bullet \pi\rho^2 \bullet \upsilon = \frac{1}{3} \bullet 3,14 \bullet 82 \bullet 6 = 401,92 \text{ (cm}^3\text{).}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Γράψε στο πλαίσιο Σ ή Λ αντίστοιχα για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση.

1. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι τρίγωνο. ☐

2. Η γενέτειρα λ, το ύψος υ και η ακτίνα ρ του κώνου ικανοποιούν τη σχέση $\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2$. ☐

3. Η γενέτειρα ενός κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από την ακτίνα. ☐

4. Η βάση ενός κώνου είναι κυκλικός δίσκος. ☐

5. Η ακτίνα της βάσης ενός κώνου είναι 6 cm και το ύψος του 8 cm. Η γενέτειρά του είναι:

Α: 10 dm   Β: 10 cm   Γ: 12 m   Δ: 6 cm.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

6. Ο όγκος του κώνου είναι 12π m^3 και η ακτίνα του 3 m. Το ύψος του είναι:

Α: π m   Β: 6 m   Γ: 4 m   Δ: 4π m.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε η παράπλευρη επιφάνεια:

Α: διπλασιάζεται   Β: τετραπλασιάζεται

Γ: παραμένει ίδια.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε ο όγκος του κώνου:

Α: διπλασιάζεται   Β: τετραπλασιάζεται

Γ: παραμένει ίδιος

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι κυκλικός τομέας με ακτίνα 12 cm και γωνία 60^{o}. Η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι:

Α: 4 cm   Β: 3 dm   Γ: 2 cm   Δ: 2 dm.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

10. Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός κώνου, τότε ο όγκος του:

Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται

Γ: τετραπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Συμπληρώστε τα στοιχεία του κώνου που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

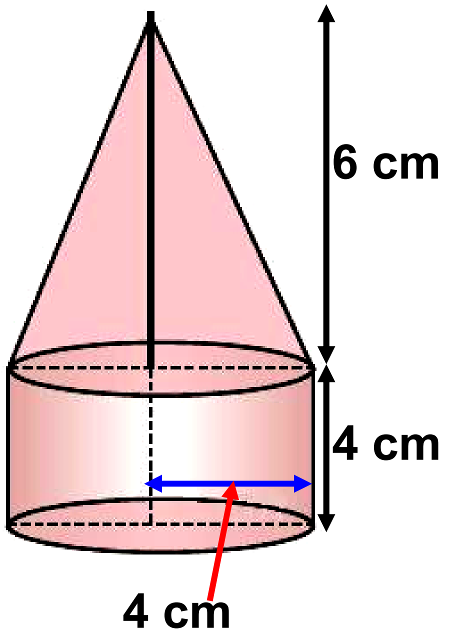
Ύψος (cm)	4	8	10	
Ακτίνα βάσης (cm)	3		4	
Γενέτειρα (cm)		10		9
Όγκος (cm^3)				
Παράπλευρη επιφάνεια (cm^2)				169,56

2 Ένας κώνος έχει όγκο $V = 1\ m^3$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου:
α) με διπλάσιο ύψος (μόνο),
β) με διπλάσια ακτίνα βάσης (μόνο),
γ) με διπλάσιο ύψος και διπλάσια ακτίνα βάσης.

3 Ένα δοχείο με σχήμα κώνου που έχει ύψος 20 cm και ακτίνα βάσης 10 cm είναι γεμάτο νερό. Αδειάζουμε το παραπάνω δοχείο σε ένα άλλο δοχείο, που έχει σχήμα κύβου με ακμή 20 cm. Να εξετάσετε αν θα ξεχειλίσει το νερό ή όχι.

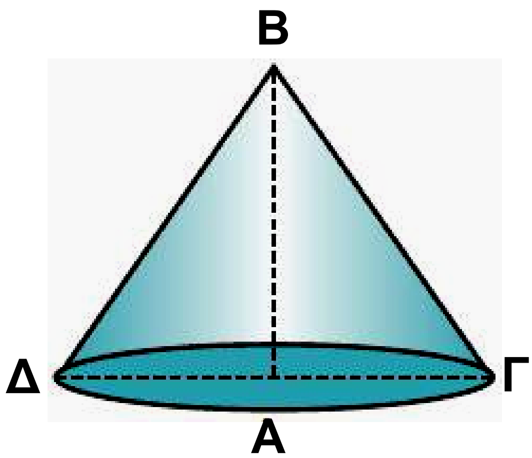
4 Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κωνική σκηνή, η οποία να έχει όγκο τουλάχιστον 20 m^3. Αν το ύψος της σκηνής είναι 3 m, πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της βάσης;

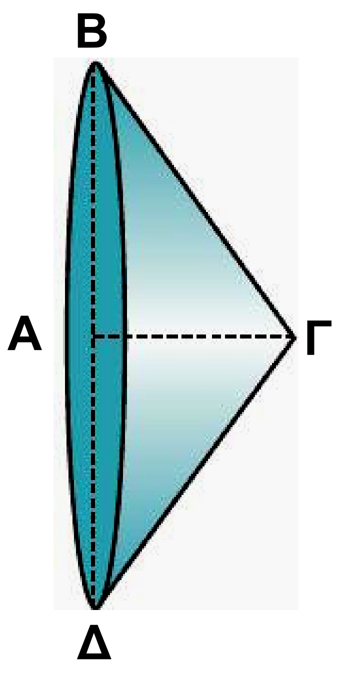
5 Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού στο διπλανό σχήμα.



6 Δύο στερεοί κώνοι έχουν κοινή βάση με ακτίνα 4 cm και ύψη 8 cm και 12 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

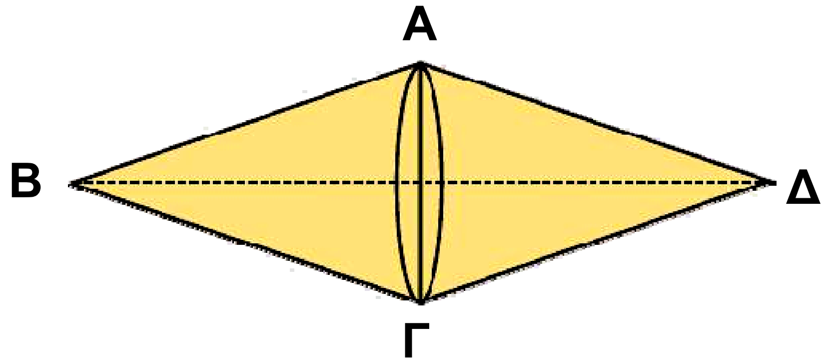
7 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) στρέφεται πρώτα γύρω από την πλευρά ΑΒ και έπειτα γύρω από την πλευρά ΑΓ, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



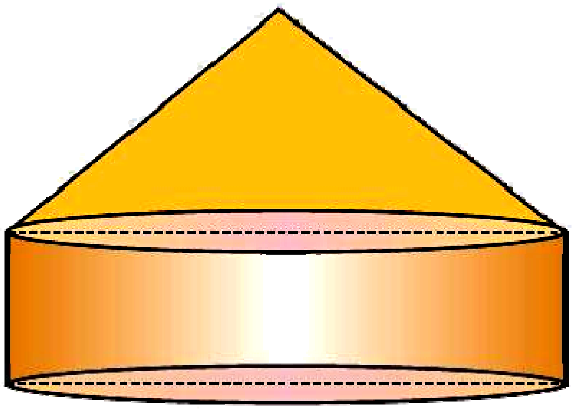


Να υπολογίσετε:
α) το λόγο των παράπλευρων επιφανειών των δύο κώνων που σχηματίζονται,
β) το λόγο των όγκων τους.

8 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ περιστρέφεται γύρω από τη βάση του ΒΓ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν ΒΓ = 24 cm και ΑΒ = 13 cm, να υπολογίσετε:
α) την ολική επιφάνεια του στερεού που σχηματίζεται,
β) τον όγκο του.



9 Η στέγη της κεντρικής σκηνής ενός τσίρκου έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 40 m και ύψος 15 m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα πλαστικοποιημένου υφάσματος χρειάστηκαν για την κατασκευή της;

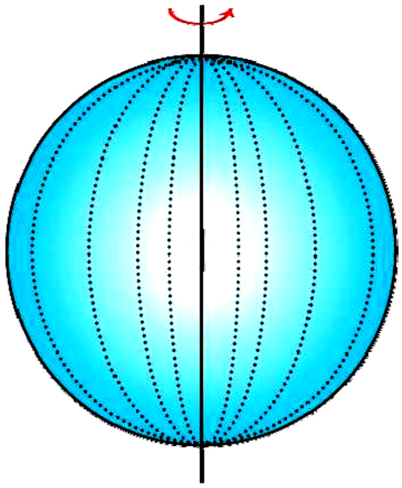


10 Μια κλεψύδρα σχήματος κώνου «μετρά» το χρόνο αδειάζοντας 4 cm^3 άμμο το λεπτό (min). Αν η ακτίνα της βάσης είναι 5 cm και το ύψος 9,17 cm, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει τελείως η κλεψύδρα;

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

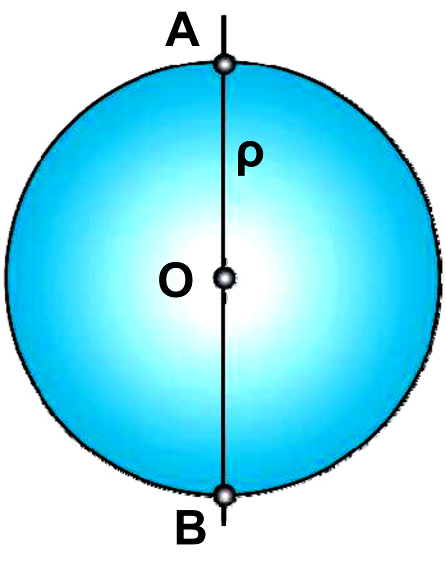
Τα διπλανά σχήματα μας δίνουν την έννοια της σφαίρας. Αν έχουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) και τον περιστρέψουμε γύρω από μία διάμετρο του ΑΒ, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μια σφαίρα.

Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.

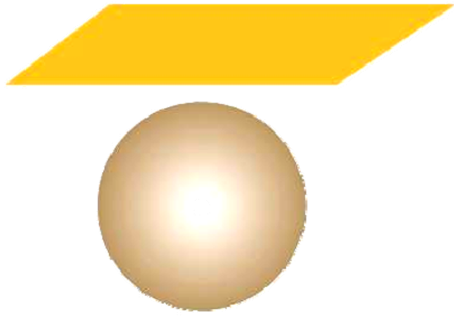


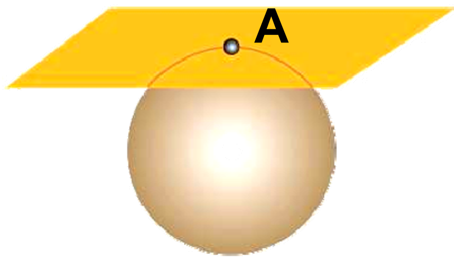
Κατά την περιστροφή ο κύκλος δημιουργεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

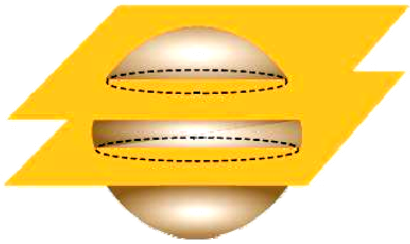
Επομένως, η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ. Το σημείο **Ο** λέγεται **κέντρο της σφαίρας** και η ακτίνα **ρ** του κύκλου λέγεται ακτίνα της σφαίρας.



Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας







Μία σφαίρα και ένα επίπεδο στο χώρο έχουν τη δυνατότητα να τοποθετηθούν κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα:

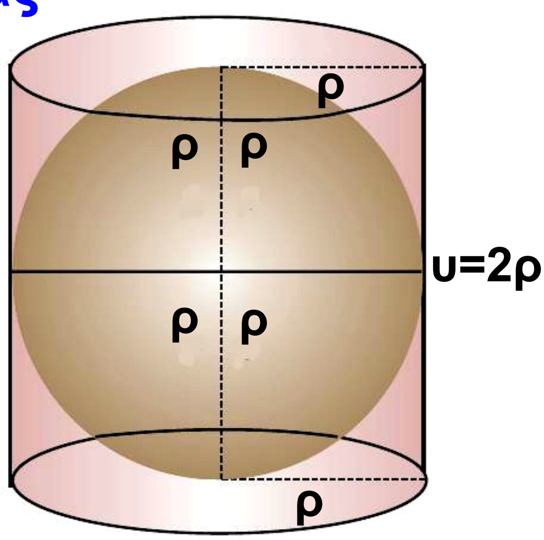
α) Να μην τέμνονται μεταξύ τους.

β) Να εφάπτονται σε ένα σημείο.

γ) Να τέμνονται σε κύκλο.

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος που αποτελεί την τομή του επιπέδου με τη σφαίρα, «μεγαλώνει» όσο το επίπεδο «πλησιάζει» στο κέντρο της σφαίρας. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος της σφαίρας**.

Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας



Όπως είδαμε, η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή ενός κύκλου (Ο, ρ) γύρω από μια διάμετρο του, αποτελεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες με τον Αρχιμήδη υπολόγισαν το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας και μάλιστα συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου!

Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα «εγγράφεται» σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

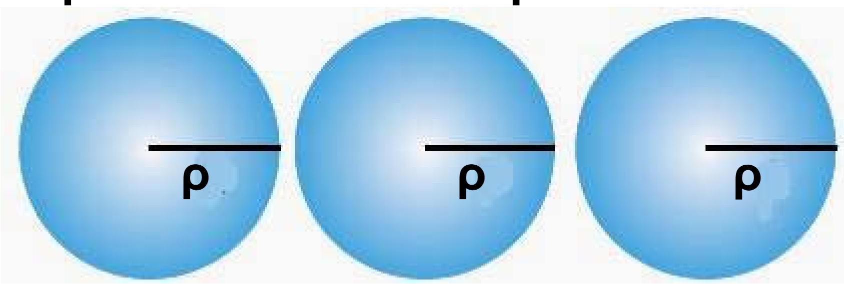
Επομένως: $E_{σφ} = 2πρ \bullet υ = 2πρ \bullet 2ρ$ ή $\boxed{E_{σφ} = 4πρ^2}$

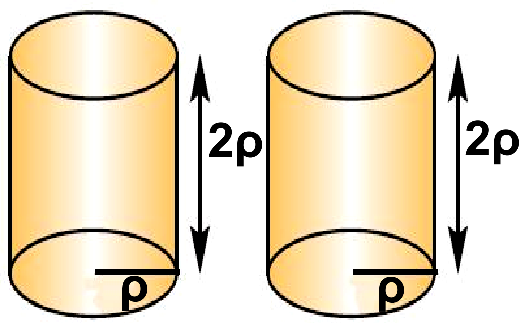
Το προηγούμενο συμπέρασμα διατυπώνεται και ως εξής:

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.

Όγκος της σφαίρας

Ας κατασκευάσουμε μια σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος υ = 2ρ. Γεμίζουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το αλεύρι στους δύο κυλίνδρους. Τελειώνοντας βλέπουμε ότι οι δύο κύλινδροι είναι τελείως γεμάτοι. Επομένως, ο τριπλάσιος όγκος σφαίρας ακτίνας ρ ισούται με τον διπλάσιο όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ = 2ρ:





$3V_{σφ} = 2V_K$ ή $V_{σφ} = \frac{2}{3} V_K = \frac{2}{3} πρ^2 \bullet (2ρ)$ ή

$$\boxed{V_{σφ} = \frac{4}{3} πρ^3}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται σφαίρα ακτίνας ρ = 2 cm. Να βρείτε:
α) το εμβαδόν Ε της επιφάνειάς της,
β) τον όγκο της.

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \bullet 3,14 \bullet 2^2 =$
$= 50,24$ (cm^2).

β) Γνωρίζουμε ότι: $V_{σφ} = \frac{4}{3} πρ^3 = \frac{4}{3} \bullet 3,14 \bullet 2^3 =$
$= 33,49$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 144π (m^2). Να βρείτε τον όγκο της.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2$, οπότε
$144π = 4πρ^2$ ή $36 = ρ^2$ ή $ρ = 6$ (m).
Από τον τύπο υπολογισμού του όγκου της σφαίρας έχουμε: $Vσφ = \frac{4}{3} πρ^3 = \frac{4}{3} π \bullet 6^3 = 904,32$ (m^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

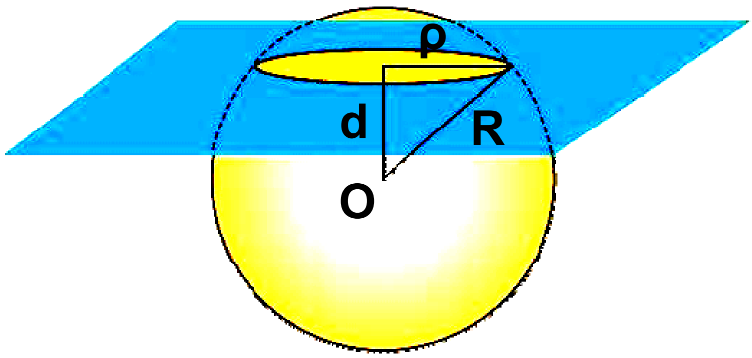
Να βρείτε πόσα χρήματα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή διαμέτρου δ = 20 m, αν το ένα κιλό χρώμα κοστίζει 8 € και καλύπτει επιφάνεια 4 m^2.

Λύση: Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι $Ε_{σφ} = 4πρ^2 = 4π \cdot 10^2 = 1256\ (m^2)$. Αφού κάθε κιλό χρώμα καλύπτει $4\ m^2$, για να καλυφθεί η επιφάνεια των $1256\ m^2$ της σφαίρας χρειάζονται $\frac{1256}{4} = 314$ κιλά χρώμα που κοστίζουν συνολικά $314 \cdot 8 = 2512$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να βρείτε το εμβαδόν της τομής επιπέδου και σφαίρας κέντρου Ο και ακτίνας R = 5 cm, όταν το επίπεδο απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση d = 3 cm.

Λύση:



Αφού το επίπεδο απέχει απόσταση από το κέντρο της σφαίρας μικρότερη από την ακτίνα της, τότε η τομή είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας:

$ρ = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\ (cm)$.

Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

$Ε = πρ^2 = π \cdot 4^2 = 50{,}24\ (cm^2)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Γράψε στο πλαίσιο Σ ή Λ αντίστοιχα για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση.

1. Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της. ☐

2. Σε μια σφαίρα ακτίνας 3 cm το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό. ☐

3. Η τομή σφαίρας και επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος. ☐

4. Η τομή σφαίρας και επιπέδου που δε διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος. ☐

5. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το γινόμενο του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της με τη διάμετρο αυτής. ☐

6. Δύο σφαίρες με ακτίνες 5 cm και 12 cm είναι γεμάτες με νερό. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενό τους σε μία τρίτη σφαίρα με ακτίνα 13 cm, τότε:

Α: Η τρίτη σφαίρα θα γεμίσει πλήρως.

Β: Η τρίτη σφαίρα θα ξεχειλίσει.

Γ: Η τρίτη σφαίρα δε θα γεμίσει.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:

Α: Διπλασιάζεται | Β: Τριπλασιάζεται

Γ: Τετραπλασιάζεται | Δ: Οκταπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Ένα τμήμα ΑΒ έχει μήκος 6 cm. Ένα σημείο Σ απέχει 4 cm από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Τότε:

Α: Το Σ ανήκει στη σφαίρα διαμέτρου ΑΒ.

Β: Το Σ ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.

Γ: Το Σ βρίσκεται εξωτερικά της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας ρ και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα έχουν λόγο:

Α: 1 **Β:** $\frac{1}{2}$ **Γ:** $\frac{1}{3}$ **Δ:** 4

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

10. Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι:

Α: διπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου

Β: τριπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου

Γ: τετραπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου

Δ: ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

Α.

Ακτίνα σφαίρας (cm)	1	2		
Εμβαδόν επιφάνειας (cm^2)			400π	
Όγκος (cm^3)				288π

Β.

ρ: Ακτίνα σφαίρας	1m	10cm	3,2dm	8dm	
Ε:Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας					
V: Όγκος σφαίρας					36π m^3

2 Η διάμετρος μιας σφαίρας είναι δ = 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

3 Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας, καθώς και τον όγκο ημισφαιρίου ακτίνας R = 4 m.

4 Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, ώστε το εμβαδόν της επιφάνειάς της να πολλαπλασιαστεί επί 4; επί 36; επί 100;

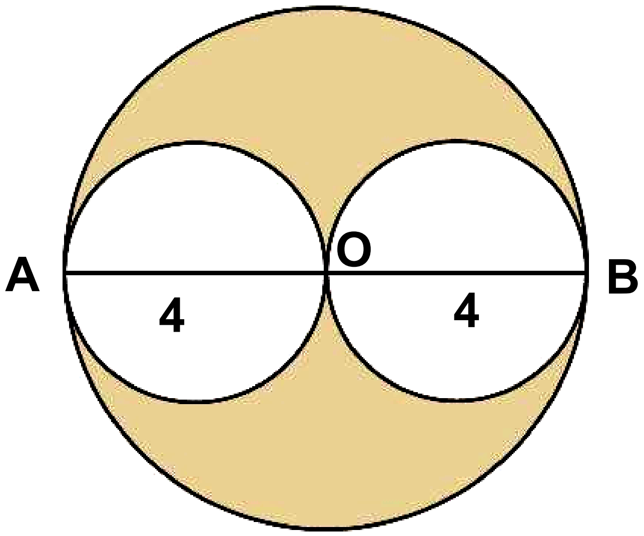
5 Να βρείτε την ποσότητα του χρώματος που χρειάζεται, για να βαφεί σφαιρική δεξαμενή ακτίνας ρ = 10 m, αν το ένα κιλό χρώματος βάφει επιφάνεια 8 m^2.

6 **Τέσσερις κίτρινες μπάλες έχουν ακτίνα 5 cm και πέντε κόκκινες μπάλες έχουν ακτίνα 4 cm. Ποιου χρώματος μπάλες έχουν τη μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια και ποιου χρώματος μπάλες έχουν το μεγαλύτερο συνολικό όγκο;**

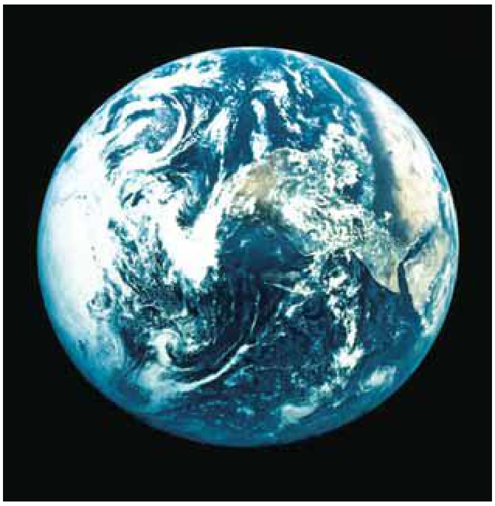
7 **Σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου χωράει ακριβώς μια σφαίρα με ακτίνα 40 cm. Να βρείτε τον όγκο του μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο.**

8 **Δύο σφαίρες έχουν διαμέτρους 30 cm και 40 cm. Να υπολογίσετε τη διάμετρο μιας τρίτης σφαίρας, της οποίας το εμβαδόν της επιφάνειάς της είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών των δύο σφαιρών.**

9 **Στο παρακάτω σχήμα οι δύο μικρές σφαίρες έχουν διαμέτρους ΑΟ = ΟΒ = 4cm, και περιέχονται στη μεγάλη σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ΟΑ = ΟΒ.**
Να βρείτε τον όγκο του γραμμοσκιασμένου στερεού.

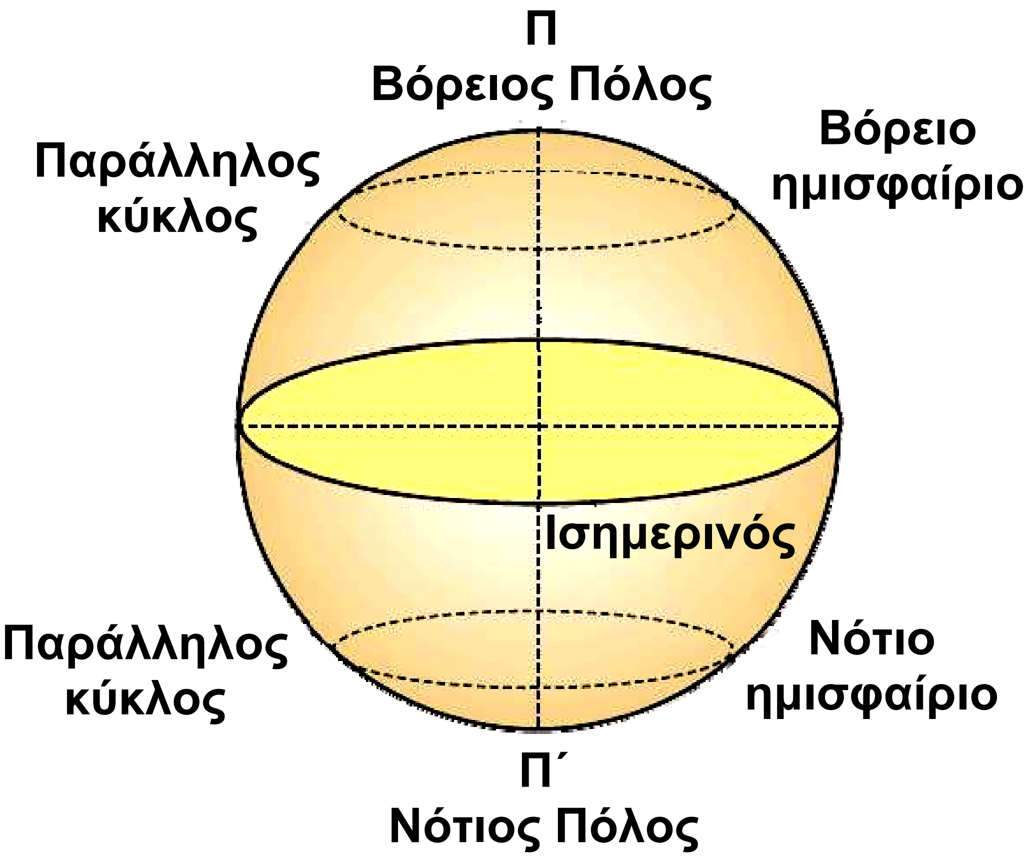


4.7. Γεωγραφικές συντεταγμένες



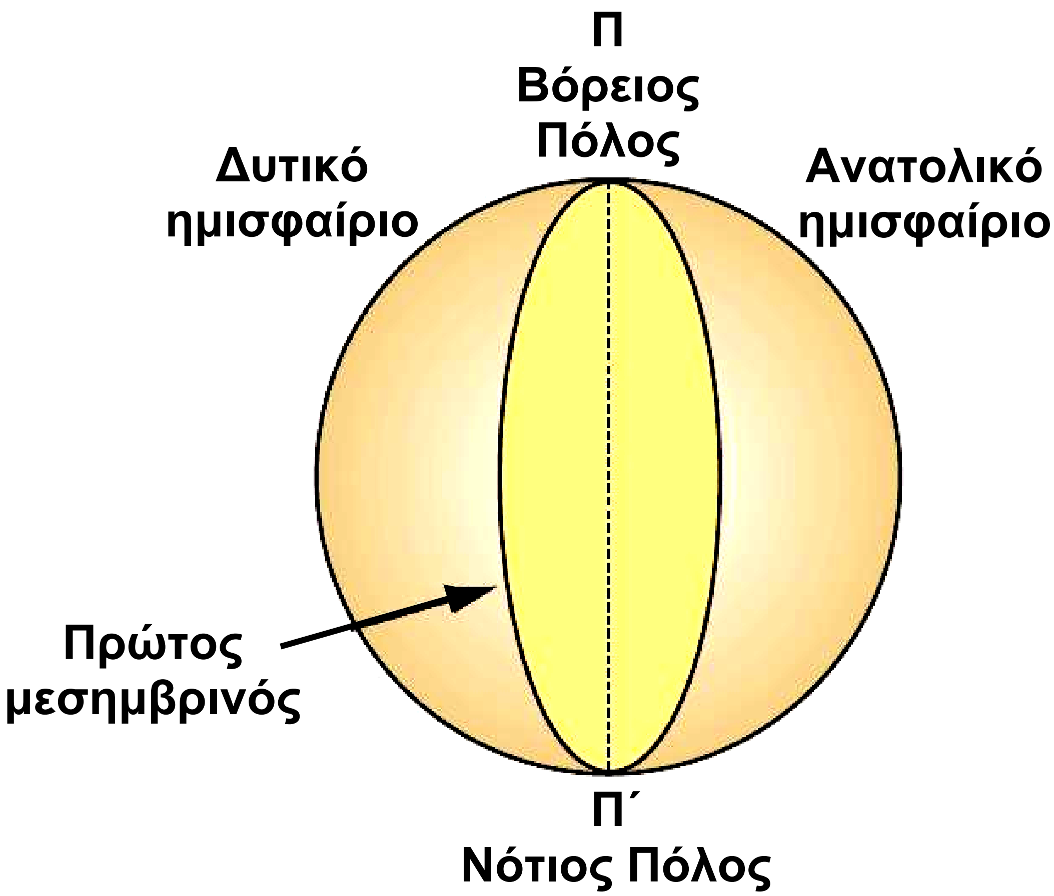
Το σχήμα της Γης είναι ελλειψοειδές. Για πρακτικούς λόγους, όμως, θεωρούμε ότι η Γη είναι σφαίρα και την ονομάζουμε **γήινη σφαίρα** ή **υδρόγειο σφαίρα**.

Η υδρόγειος σφαίρα περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της, γύρω από ένα νοητό άξονα, ο οποίος περνά από τους δύο πόλους. Ο νοητός αυτός άξονας ονομάζεται **άξονας περιστροφής της Γης**. Ο μέγιστος κύκλος της γήινης σφαίρας, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής, ονομάζεται **ισημερινός**.



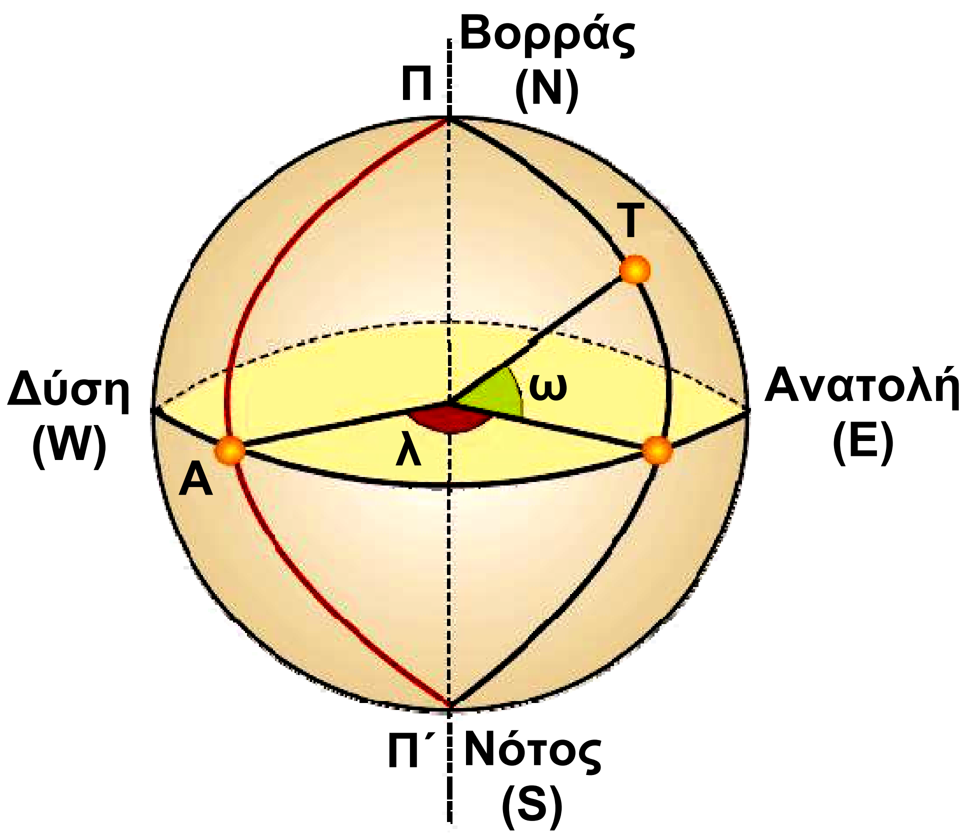
Ο ισημερινός χωρίζει τη Γη σε δύο ημισφαίρια, το βόρειο (συμβολίζεται με το γράμμα Ν από την αγγλική λέξη North που σημαίνει Βορράς) και το νότιο (συμβολίζεται με το γράμμα S από την αγγλική λέξη South που σημαίνει Νότος).

Η τομή κάθε επιπέδου, το οποίο είναι παράλληλο προς το επίπεδο του ισημερινού με την επιφάνεια της γήινης σφαίρας, είναι κύκλος με κέντρο πάνω στον άξονα περιστροφής.
Έτσι, το βόρειο και το νότιο ημισφαίριο χωρίζονται από παράλληλους προς τον ισημερινό κύκλους, με αποτέλεσμα από κάθε τόπο πάνω στην επιφάνεια της Γης να περνά ένας παράλληλος κύκλος, ο οποίος ονομάζεται παράλληλος του τόπου.



Το ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ΄, το οποίο περνά από το αστεροσκοπείο Γκρήνουϊτς της Μ. Βρετανίας, ονομάζεται πρώτος μεσημβρινός. Ο πρώτος μεσημβρινός χωρίζει τη γήινη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια, το **ανατολικό** (συμβολίζεται με το γράμμα Ε από την αγγλική λέξη East που σημαίνει ανατολή) και το **δυτικό** (συμβολίζεται με το γράμμα W από την αγγλική λέξη West που σημαίνει δύση).
Από κάθε τόπο περνά ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ΄. Το ημικύκλιο ονομάζεται μεσημβρινός του τόπου.

Κάθε τόπος χαρακτηρίζεται από δύο διαφορετικές επίκεντρες γωνίες. Στο παρακάτω σχήμα, αν Α είναι το σημείο τομής του ισημερινού με τον πρώτο μεσημβρινό, ο τόπος Τ χαρακτηρίζεται από την επίκεντρη γωνία λ και την επίκεντρη γωνία ω.
Η επίκεντρη γωνία λ ονομάζεται γεωγραφικό μήκος του τόπου και η ω γεωγραφικό πλάτος του τόπου.



Ανάλογα με τη θέση του τόπου, το γεωγραφικό μήκος χαρακτηρίζεται ως δυτικό (W) ή ως ανατολικό (E) (αν ο τόπος βρίσκεται στο ανατολικό ή στο δυτικό ημισφαίριο αντίστοιχα).
Επίσης, το γεωγραφικό πλάτος χαρακτηρίζεται ως βόρειο (N) ή νότιο (S), αν ο τόπος βρίσκεται στο βόρειο ή στο νότιο ημισφαίριο αντίστοιχα.

Έτσι, οι συντεταγμένες μερικών σπουδαίων πόλεων είναι:

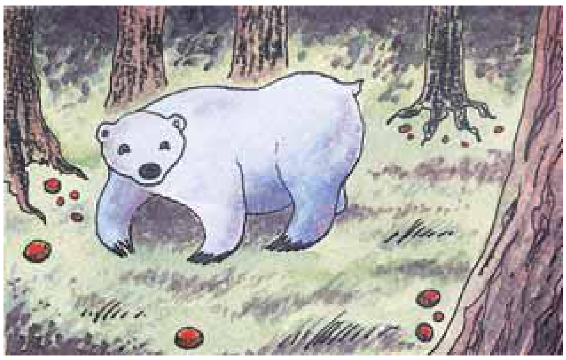
	N	E	S	W
ΑΘΗΝΑ	37,27^{oo}	23,45^{o}		
ΘΕΣΣΑΛΟ-ΝΙΚΗ	40,15^{o}	22,30^{o}		
ΡΩΜΗ	40,04^{o}	12,30^{o}		
ΠΑΡΙΣΙ	48,23^{o}	3,08^{o}		
ΛΟΝΔΙΝΟ	51,29^{o}	0,38^{o}		
ΣΙΝΔΕΥ		151,15^{o}	34,07^{o}	
ΡΙΟ ΝΤΕ ΤΖΑΝΕΙΡΟ			23,38^{o}	43,08^{o}
ΝΕΑ ΥΟΡΚΗ	43,10^{o}			73,45^{o}

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

- **Σε ποιο μέρος της Γης ο άνθρωπος θα κοίταζε νότια προς όλες τις κατευθύνσεις;**

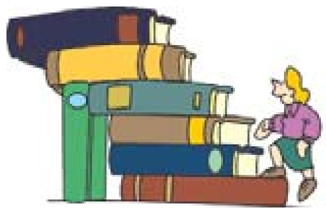
- **Σχεδιάστε ένα σφαιρικό τρίγωνο που να έχει όλες τις γωνίες του ορθές.**

- **Ένας ταξιδιώτης περπατώντας διέσχισε μια διαδρομή και ξαναγύρισε στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής το κεφάλι του διένυσε 12,56 μέτρα περισσότερα από τα πόδια του. Πως είναι δυνατόν;**



- **Μια αρκούδα βγήκε από τη σπηλιά της, προχώρησε 1 Km νότια, στη συνέχεια 1 Km ανατολικά και τέλος 1 Km βόρεια και ξαναβρέθηκε στη σπηλιά της. Τι χρώμα είχε η αρκούδα;**

Επανάληψη Κεφαλαίου 4



Στερεομετρία

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

✐ Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:

- να είναι παράλληλα
- να τέμνονται κατά μία ευθεία.

Σχετικές θέσεις ευθειών το χώρο

✐ Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ, τότε οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:

- Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

✐ Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

- Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.
- Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.
- Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

✐ Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

✐ Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας:

$$E_{\Pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Ολικό εμβαδόν: $E_{ολ} = E_{\Pi} + 2E_{β}$

Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

✐ Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $E_{\Pi} = 2πρ \cdot υ$

Ολικό εμβαδόν: $E_{ολ} = E_{\Pi} + 2E_{β}$

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

✐ Όγκος πρίσματος: $V = (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

✐ Όγκος κυλίνδρου: $V = πρ^2 υ$

Πυραμίδα

✐ Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας:

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2} (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$$

$$E_{ολ} = E_{\Pi} + E_{β}$$

Όγκος πυραμίδας:

$$V = \frac{1}{3}\ (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Κώνος

✐ **Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.**

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου:

$$E_{\Pi} = \pi\rho\lambda$$

$$E_{o\lambda} = E_{\Pi} + E_{\beta} = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$$

Όγκος κώνου: $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \upsilon$

Σφαίρα

✐ **Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.**

Εμβαδόν σφαίρας: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$

Όγκος σφαίρας: $V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ $1^{o} – 89^{o}$

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	,01908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,2698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Περιεχόμενα 2ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ